Министерство образования Кировской области

Кировское областное государственное образовательное автономное учреждение дополнительного профессионального образования
«Институт развития образования Кировской области»

Кировское областное государственное общеобразовательное автономное учреждение
«Кировский физико-математический лицей»

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Сборник лучших практик учителей математики

Киров, 2025

Министерство образования Кировской области

Кировское областное государственное образовательное автономное учреждение дополнительного профессионального образования «Институт развития образования Кировской области»

Кировское областное государственное общеобразовательное автономное учреждение «Кировский физико-математический лицей»

Сборник лучших практик учителей математики по ведению курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

Киров, 2025

УДК 37.02
ББК 60.60
С23

Печатается по решению Совета по научной,
инновационной и редакционно-издательской деятельности
КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области»

Под научной редакцией
Ряттель А.В., к.ф.-м.н., доцента, методиста кафедры предметных областей КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области».

Рецензенты:
Набоких А.А., доцент кафедры управления КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области», кандидат экономических наук, доцент;
Чупраков Д.В., доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ВятГУ», кандидат физико-математических наук, доцент.

С23 Сборник лучших практик учителей математики по ведению курса «Теория вероятностей и математическая статистика»: Сборник материалов / под науч. ред. А.В. Ряттель, авторский коллектив; КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области»; КОГОАУ «КФМЛ». – Киров, 2025. – 72 с.

ISBN

В сборнике представлены материалы из опыта работы учителей математики Кировской области по учебному курсу «Вероятность и статистика».

Сборник адресован учителям математики, методистам, заместителям директоров по учебной и учебно-воспитательной работе и иным педагогическим работникам, интересующимся вопросами повышения эффективности преподавания курса и формирования стохастического мышления обучающихся.

Авторы публикуемых материалов несут ответственность за подбор и точность приведённых фактов, цитат, статистических данных, собственных имён, географических названий и прочих сведений, а также за то, что в их материалах не содержится данных, не подлежащих открытой публикации.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современное школьное математическое образование находится в процессе глубокой трансформации, обусловленной внедрением обновлённых Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС). Эти изменения смещают акцент с простого усвоения фактов и алгоритмов на формирование универсальных компетенций, на способность применять знания для решения практических, жизненных задач. В этом новом образовательном ландшафте курс «Теория вероятностей и математическая статистика» приобретает поистине ключевое значение, переходя из разряда специальных тем в категорию фундаментальной грамотности современного человека.

Обновленный ФГОС подчёркивает необходимость развития у учащихся вероятностного мышления и статистической грамотности. Это не просто требования к предметным результатам; это ответ системы образования на вызовы цифровой эпохи. Сегодня мы все погружены в мир данных: новостные ленты, рекламные предложения, прогнозы погоды, медицинские исследования, финансовые отчёты и т.п. − и всё это требует умения критически оценивать информацию, понимать степень её достоверности, отличать случайное от закономерного. Способность анализировать данные, видеть за ними реальные процессы и принимать на этой основе взвешенные решения становится такой же необходимой компетенцией, как умение читать и писать.

Курс теории вероятностей и статистики перестаёт быть абстрактной и оторванной от жизни дисциплиной. Он становится:

- практическим инструментом для понимания социальных, экономических и природных явлений;
- фундаментом критического мышления, защищающим от манипуляций и псевдонаучных утверждений;
- основой для будущей профессиональной деятельности не только в STEM-направлениях (наука, технологии, инженерия, математика), но и в социологии, лингвистике, маркетинге и политологии.

Однако преподавание этого курса таит в себе уникальные вызовы для педагога. Как сделать наглядными концепции, оперирующие категориями случайности и неопределённости? Как подобрать примеры, которые будут интересны и понятны учащимся? Как оценить не только вычислительные навыки, но и уровень стохастической интуиции?

Данный сборник призван стать практическим помощником и источником вдохновения для учителя математики, который стремится идти в ногу со временем и соответствовать духу новых стандартов. В него вошли практики, апробированные педагогами Кировской области.

Мы уверены, что представленные в сборнике материалы помогут вам выстроить преподавание учебного курса вероятности и статики так, чтобы он стал для ваших учеников увлекательным путешествием в мир данных и возможностей, вооружив их одним из самых важных инструментов для жизни в XXI веке.

О межпредметной интеграции при изучении комбинаторики и стохастики в школе

***Ирина Леонидовна Атепалихина*,**
учитель математики
КОГОАУ «Кировский физико-математический лицей»

В последнее время в педагогической и методической литературе большое внимание уделяется интеграции знаний. Связано это прежде всего с тем, что процесс интеграции происходит в современной науке. Появляются такие области знаний, которые находятся на стыке двух или нескольких наук: биохимия, геофизика, астрофизика, радиохимия и т.п. Кроме того, уже давно произошёл переход «от видения мира с одной точки зрения, … к видению его с разных позиций и в разных аспектах» [3, с. 67]. Именно межпредметная интеграция помогает учащимся целостно воспринимать окружающий мир.

Идея интеграции была заложена ещё в работах Я.А. Коменского, Д. Локка, Н.Г. Чернышевского и К.Д. Ушинского. Правда, тогда педагоги говорили о межпредметных связях. Понятие интеграции появляется в 80-90-х годах XX в. Интеграция и межпредметные связи – не одно и то же. Интеграция означает восстановление, восполнение, объединение частей в целое. Таким образом, интеграция предметов означает их объединение для изучения какого-либо понятия, явления, тогда как межпредметные связи предполагают лишь использование материала одного предмета на другом. Для интегрированного обучения характерны такие формы как интегрированные курсы, интегрированные уроки.

Интегрированное обучение необходимо для развития системного стиля мышления. «Познание многосторонних реальных связей объектов достигается с помощью межнаучных связей, взаимопроникновения методов различных наук, выделения новых пограничных областей. В учебном познании основным фактором развития системного мышления учащихся выступают межпредметные связи. Установление и усвоение учащимися связей между отдельными элементами знаний и умений из различных учебных предметов способствуют формированию системности знаний…» [2, с.3].

Интеграция помогает учителю в формировании у учащихся умения анализировать, обобщать, сравнивать.

Кроме того, без интегрирующих связей между школьными предметами, как отмечает А.А. Харунжев, знания ученика недостаточно прочны, происходит быстрый процесс забывания. И действительно, как показывает практика, если ученик, изучив то или иное понятие, формулу, больше с ними нигде не встречается, то всё это он быстро забывает. А вот если он свои знания применил на других предметах, то и знания эти становятся более осмысленными и в памяти сохраняются надолго.

Нельзя переоценить роль межпредметной интеграции при изучении математики в целом и комбинаторики и стохастики в частности. Чуть подробнее остановимся на необходимости использования интеграции при изучении комбинаторики, теории вероятностей и статистики в школе.

Необходимо отметить, что понятие вероятности является одним из основных в неклассической научной картине мира. Уже в начале XX в. стало ясно, что законы жёсткой детерминации односторонне раскрывают сущность окружающего мира. Теоретико-вероятностные представления хотя и медленно, но завоевывали одну отрасль науки за другой. И сейчас современные физика, биология, астрономия, кибернетика, экономика, социология, лингвистика многим обязаны теории вероятностей и статистике. Поэтому стиль мышления, ориентирующийся на детерминизм, стал постепенно меняться вероятностно-статистическим стилем мышления. Ю.В. Сачков писал, что «мышление, которое не включает в свою орбиту идею случайности, является примитивным» [6, с. 93]. Всё это не могло не отразиться на преподавании теории вероятностей и статистики в школе. Мы должны формировать у школьников вероятностно-статистический стиль мышления. Формирование вероятностно-статистического мышления заключается в том, чтобы школьники осознали, что в природе и обществе существуют статистические закономерности, а это невозможно сделать без межпредметной интеграции. Межпредметная интеграция помогает учащимся добиться более глубокого понимания сущности случайных событий, которые рассматриваются на таких школьных предметах как физика, химия, биология, экономика.

Изучая теорию вероятностей и статистику в отрыве от других предметов, мы не сможем добиться развития статистического мышления. Это подтверждает опыт преподавания данной темы в период реформы математического образования 60-70 годов. Е.А. Бунимович отмечает, что опыт изучения основ теории вероятностей «на абстрактно-формальном уровне, в традиционной схеме урока дал в основном негативные результаты и привёл к изъятию этого материала из школьных программ» [1, с. 54]. Ю.В. Сачков считает: «Ключ к пониманию вероятности – в особом системном видении мира» [5, с. 11]. А сформировать системное видение мира помогает, как уже отмечалось ранее, межпредметная интеграция.

Таким образом, чтобы выработать вероятностно-статистический стиль мышления, необходимо изучать стохастику не только на уроках математики. Очень важно показать её приложения, применять при изучении других предметов. «Совместный анализ абстрактных форм и их реальных «наполнений» и позволит сделать более осязаемым особенности вероятностного видения мира» [5, с. 13].

Далее приведём примеры тем и понятий из различных предметов, при изучении которых необходимы знания по комбинаторике, теории вероятностей и статистике.

География: «Гидросфера», «Климат» (амплитуда колебания температуры, средние температур, годовой ход температуры, осадки, предсказание погоды), «Материки», «Реки», «Почвы», «Учение о природных зонах», «Население».

Биология: «Химический состав и строение клетки», «Размножение растений», «Размножение животных», «Человек» (эволюция человека, нейрогуморальная регуляция, условные и безусловные рефлексы, состав крови, группы крови, резус-фактор, газообмен в лёгких и тканях, митоз, мейоз, адаптация и др.).

Физика: «Молекулы» (количество молекул в 1 куб. см), «Диффузия», «Три состояния вещества», «Давление газа», «Модели атомов. Опыт Резерфорда», «Экспериментальные методы исследования частиц», «Изотопы», «Цепная реакция», «Биологическое действие радиации», «Распределение молекул идеального газа в пространстве», «Распределение молекул идеального газа по скоростям», «Второй закон термодинамики».

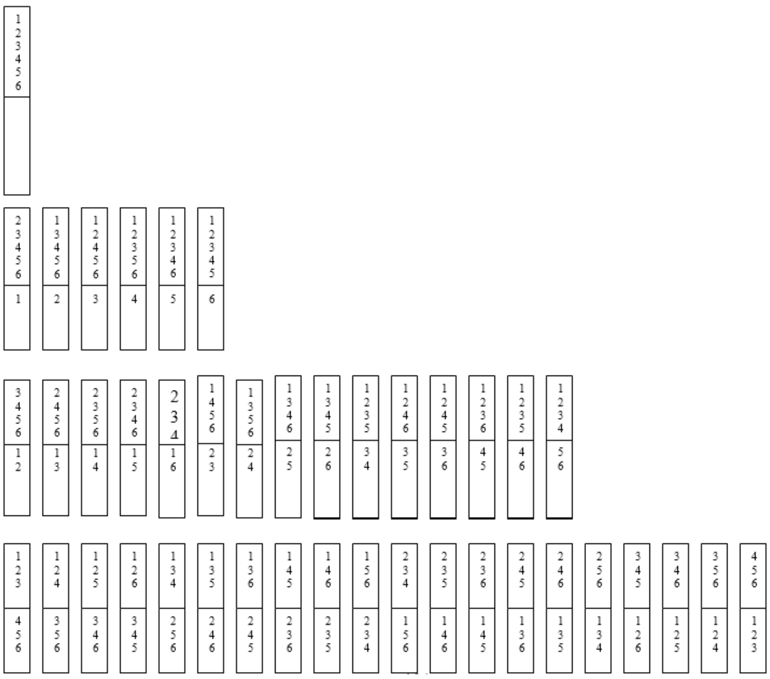
Химия: «Строение атома углевода», «Изомерия», «Фенолы» (реакция замещения), «Кетоны», «Углеводы» (состав сахарного песка), «Белки» (строение, элементарный состав белковых веществ), «Периодический закон» (изотопы), «Изомерия», «Почему протекают химические реакции» (энтропия), «Химия и проблемы охраны окружающей среды» (состав воздуха; водные ресурсы Земли; распределение пресных вод гидросферы).

Русский язык, литература: составление частотных таблиц, доказательство авторства.

Примеры заданий.

1. Объясните, почему газ занимает весь предоставленный ему объём?

Допустим, что в сосуде находится только 6 молекул. Пронумеруем эти молекулы: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколькими способами эти молекулы могут располагаться по двум половинам сосуда. Для каждой молекулы существует два варианта: либо находиться в одной половине сосуда, либо – в другой. По принципу умножения получаем $2^6 = 64$ варианта распределения молекул по двум половинам сосуда. Возможны следующие случаи:

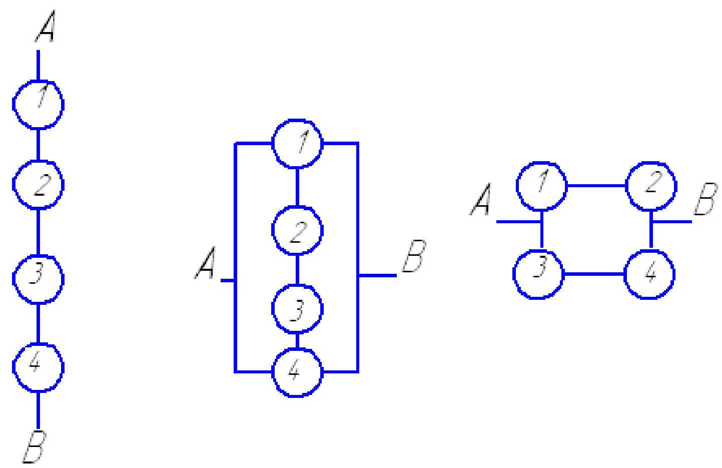


Аналогично можно перебрать варианты, когда в верхней половине находится 2 молекулы, 1 молекула, 0 молекул. После такого перебора нетрудно подсчитать вероятности следующих событий:

1. Все молекулы расположились в первой половине сосуда ($\frac{1}{64}$).
2. В первой половине расположилось 5 молекул ($\frac{5}{64}$).
3. В первой половине расположилось 4 молекулы ($\frac{15}{64}$).
4. Молекулы расположились равномерно ($\frac{20}{64}$).
5. В первой половине находится 2 молекулы ($\frac{15}{64}$).
6. В первой половине находится 1 молекула ($\frac{6}{64}$).
7. В первой половине нет молекул ($\frac{1}{64}$).

Таким образом, наиболее вероятным является такое состояние газа, при котором молекулы располагаются равномерно по всему объёму.

2. Определить, для какой из схем, изображённых на рисунке, вероятность того, что ток будет проходить от точки А к точке В, будет наибольшей [4].



Каждый выключатель может быть включен (+) или выключен (–). Всего выключателей 4, поэтому число возможных состояний для каждой схемы равно 2·2·2·2=16

Первая цепь проводит ток только в одном случае, если включены все 4 выключателя: + + + + . Таким образом, Р (A_1) $= \frac{1}{16}$, где A_1– событие, означающее, что ток проходит от А к В. Вторая цепь проводит ток, если включен хотя бы один выключатель, поэтому $P(A_2) = \frac{15}{16}$, где событие (A_2 означает, что ток проходит от А к В. Третья цепь проводит ток от А к В (событие A_3) в 7 случаях: + + + +, + – + + , – + + +, + + – +, + + + –, – – + +, + + – –. $P(A_3) = \frac{7}{16}$. Наибольшую вероятность проводить ток имеет цепь 2.

Литература

1. Бунимович Е.А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики. // Математика в школе. −2002. − №4. − С. 52– 58.

2. Зверев И.Д., Максимова В.Н. Межпредметные связи в современной школе. − М.: Педагогика, 1981. – С. 160.

3. Лазарев Ф.В., Сагатовский В.Н. О формировании интервального стиля мышления. // Научные доклады высшей школы. Философские науки. − 1979. − № 1. − С. 64 – 72.

4. Самигуллина З.Н. К методике решения простейших комбинаторных задач и задач на вычисление вероятности в средней школе: Автореф. дис. канд. пед. наук. Челябинск, 1969. – 21 с.

5. Сачков Ю.В. Введение в вероятностный мир (Вероятность, случайность, независимость, иерархия). − М.: Научный мир, 1999. – С. 144.

6. Сачков Ю.В. Статистические данные как эмпирический базис социальных наук. // Вопросы философии. − 1999. − № 7. − С. 79 – 93.

7. Харунжев А.А. Интеграция в образовании: теория и практика. − Киров: Изд-во ВятГГУ, 2003. – С. 96.

Использование диаграмм при решении краеведческих задач по математике

Татьяна Александровна Боброва,
учитель математики
КОГОАУ «Кировский экономико-правовой лицей»

Задание 1. Население Кировской области очень разнообразно. 90% от всего населения – русские. На диаграмме *(рис. 1)* представлены ещё четыре распро-

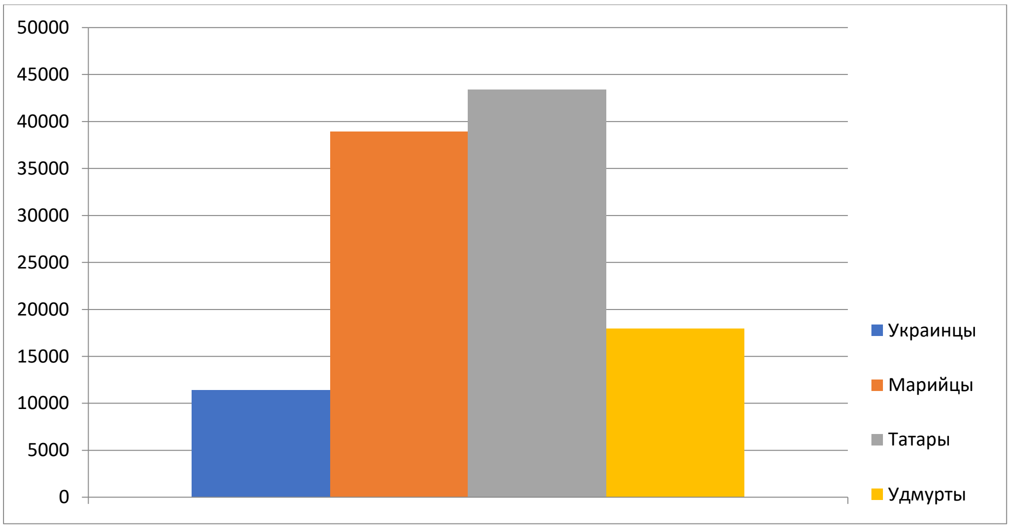


Рис.1

странённые в нашей области национальности. Определите, сколько людей самой нераспространённой национальности, сколько людей самой распространённой национальности показано на диаграмме.

Решение. Рассмотрим диаграмму, на ней представлены четыре национальности столбиками разного цвета, шкала слева показывает количество людей. Самый низкий столбик – синий, следовательно, украинцев в Кирове меньше всего и примерно 11000 человек. Самый высокий столбик – зелёный, следовательно, татар в Кирове больше всего и примерно 44000 человек

Ответ: украинцы – 11000 человек, татары – 44000 человек.

Задание 2. За всю историю город переименовывался целых три раза. В 1374 г. город назывался «Вятка», спустя 83 года его переименовывают в «Хлынов», через 323 года городу возвращают название «Вятка», и окончательное название «Киров» появляется спустя ещё 154 года.

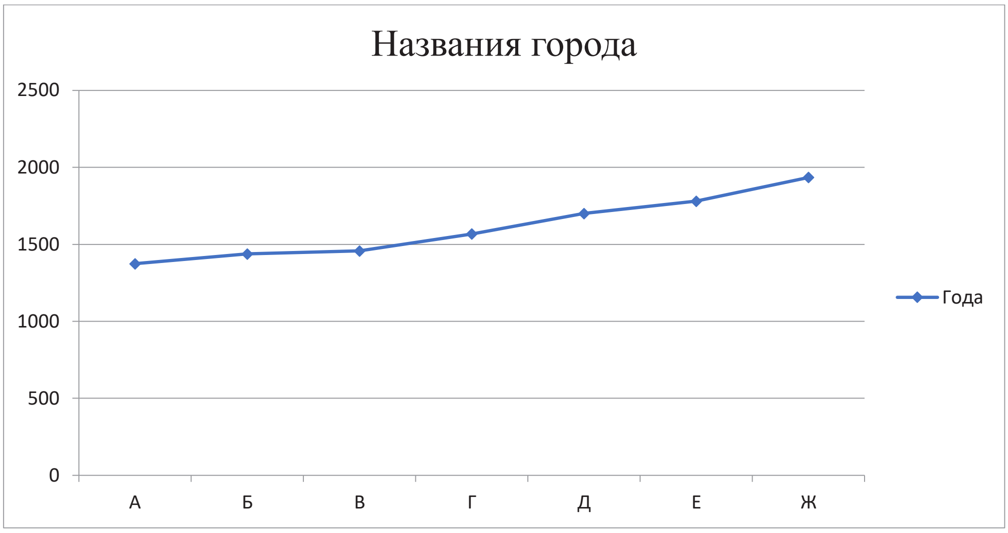


Рис.2

Определите, какая точка на диаграмме *(рис. 2)* соответствует историческому событию, и определите год этого события. Заполните таблицу.

Название	***Вятка***	***Хлынов***	***Вятка***	***Киров***
Буква на диаграмме				
Год				

Решение. Внимательно читаем текст.

Первая дата – 1374 год, в этот год город был назван «Вятка», значит Вятка – точка А.

1374 + 83 = 1457 – следующая дата, ищем на диаграмме, получаем точку В.

1457 + 323 = 1780 – год переименования города в Вятку. Ищем дату на диаграмме, получаем точку Е.

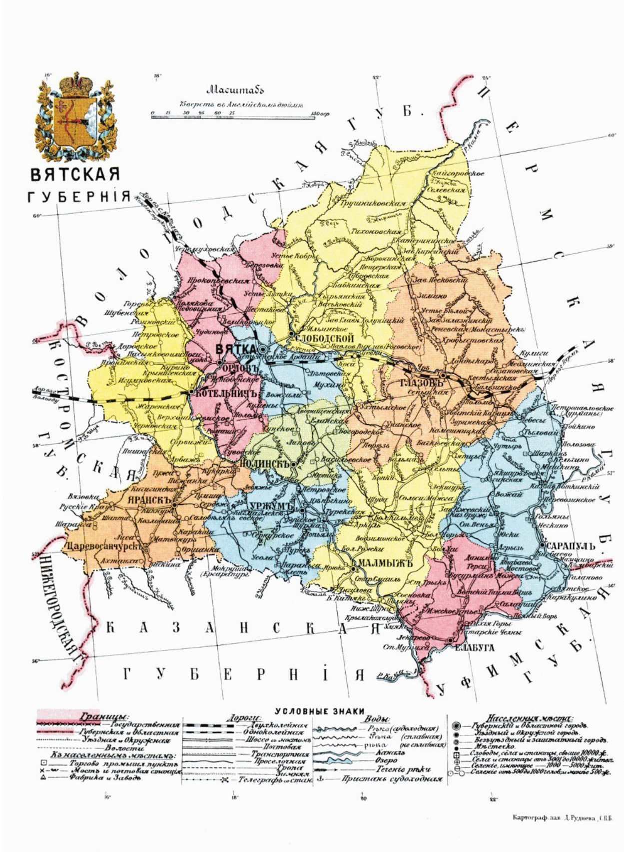
Вычисляем последнюю дату, 1780 + 154 = 1934, точка Ж.

Заполняем таблицу.

Ответ:

Название	***Вятка***	***Хлынов***	***Вятка***	***Киров***
Буква на диаграмме	А	В	Е	Ж
Год	1374	1457	1780	1934

Задание 3. Кировская область имеет очень богатую историю.



Вот некоторые важные события в истории Кировской области:

1. 1727 год – Хлыновская провинция перешла из состава Сибирской губернии Московского уезда в состав Казанской.

2. 1780 год – Указом императрицы Екатерины II образовано Хлыновское наместничество, которое в 1796 году было преобразовано в Вятскую губернию, а город Хлынов был переименован в город Вятку.

3. 1918 год – В Вятской губернии был образован Советский уезд.

4. 1929 год – Вятская губерния и все её уезды были упразднены, а их территория вошла в Нижегородскую область РСФСР.

5. 1934 год – ВЦИК принял решение о переименовании на то время районного центра – города Вятки – в Киров.

6. 1936 год – Удмуртская АССР была выделена из состава Кировского края, а сам Кировский край был преобразован в Кировскую область.

На основе полученной информации постройте диаграмму, показывающую важные даты для нашей области.

Решение. Внимательно читаем текст. Проводим ось x, на которой будут отмечены 6 событий (по тексту). Проводим ось y, на которой отмечаем даты. На пересечении события и нужного года ставим точку, соединяем все точки по порядку (увеличение года). Подписываем смысл полоски справа от диаграммы *(Рис. 3)*.

Ответ:

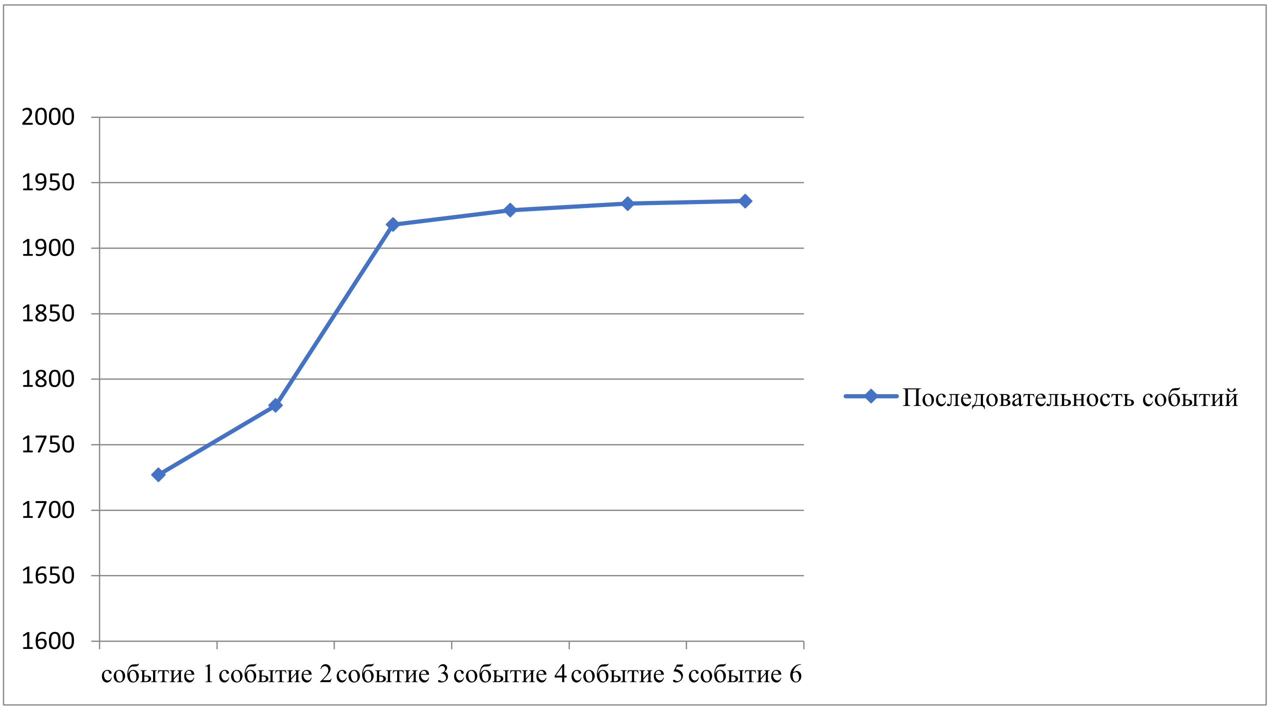


Рис.3

Задание 4. Численность населения Кировской области падает. В 2009 году она составляла 1365 тыс. чел., в 2014 – 1310 тыс. чел., в 2019 – 1272 тыс. чел., в 2024 – 1131 тыс. чел.

По полученным данным постройте круговую диаграмму численности населения Кировской области в 2009, 2014, 2019 и 2024 годы.

Решение. Внимательно прочитаем текст.

Посчитаем сумму всего населения за указанные годы.

Получим .

Разделим число жителей в конкретный год на полученную сумму и умножим на 100%:

$(1365 : 5078) \cdot 100\% \approx 27\%$ – составляет население Кировской области в 2009 году от суммы населения в указанные годы

$(1310 : 5078) \cdot 100\% \approx 26\%$ – составляет население Кировской области в 2014 году от суммы населения в указанные годы

$(1272 : 5078) \cdot 100\% \approx 25\%$ – составляет население Кировской области в 2019 году от суммы населения в указанные годы

$(1131 : 5078) \cdot 100\% \approx 22\%$ – составляет население Кировской области в 2024 году от суммы населения в указанные годы

Изобразим круг и разделим его на 4 части так, чтобы каждый сектор соответствовал полученным процентам.

$\frac{27 \cdot 360}{100} = 97{,}2^0$ – 2009 год

$\frac{26 \cdot 360}{100} = 93{,}6^0$ – 2014 год

$\frac{25 \cdot 360}{100} = 90^0$ – 2019 год

$\frac{22 \cdot 360}{100} = 79{,}2^0$ – 2024 год

Подпишем значения и легенду диаграммы *(Рис.4)*.

Ответ:

Рис.4

Задание 5. Главная река Кировской области – Вятка. Рассмотрим протяжённость некоторых рек в пределах Кировской области:

Река Вятка – 1250 км

Река Чепца – 200 км

Река Пижма – 220 км

Река Кама – 551 км

Река Молома – 419 км

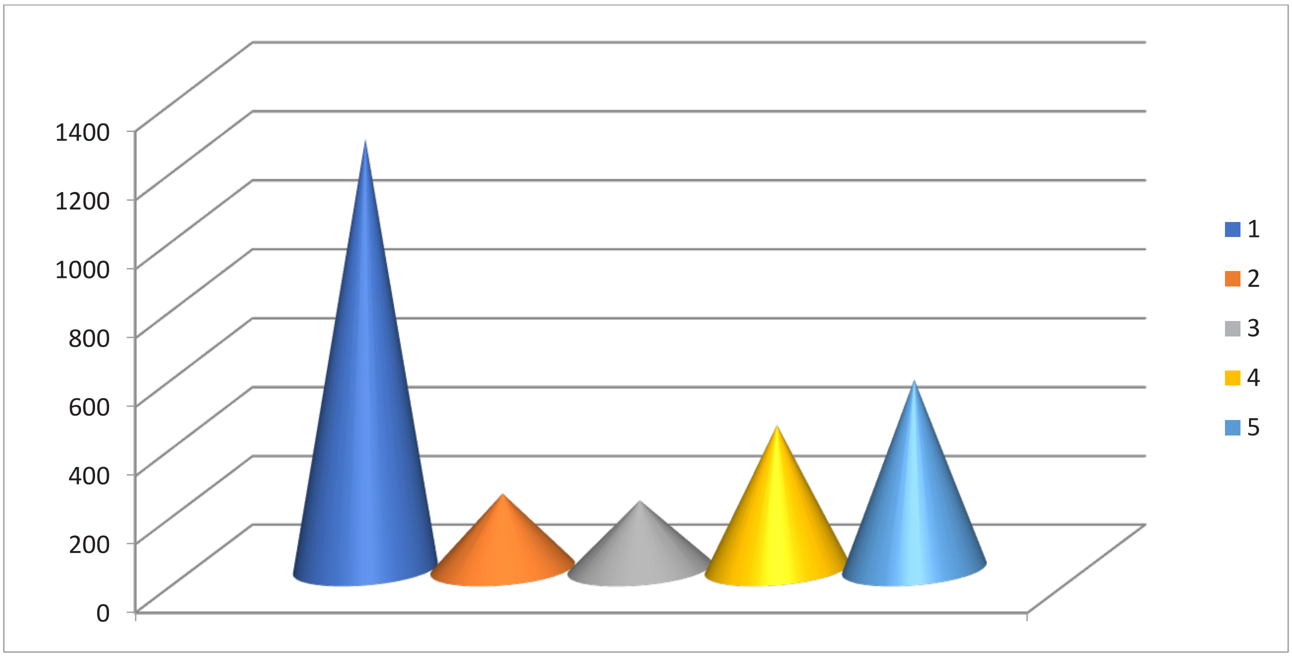


Рис. 5

На основе полученной информации на диаграмме *(Рис. 5)* сопоставьте столбцы названиям рек. Заполните таблицу.

1	*2*	*3*	*4*	*5*

Решение. Расставим все числа и столбики диаграммы в порядке убывания:

Река Вятка – 1250 км – самый высокий столбик №1

Река Кама – 551 км – столбик №5

Река Молома – 419 км – столбик №4

Река Пижма – 220 км – столбик №2

Река Чепца – 200 км – столбик №3

Теперь каждый столбик соответствует нужной реке. Внимательно заполним таблицу.

Ответ:

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Вятка	Пижма	Чепца	Молома	Кама

Теория вероятностей в реальном мире: от бытовых ситуаций до страхового дела

Ольга Геннадьевна Верещагина,
учитель математики
КОГОАУ «Кировский физико-математический лицей»

Теория вероятностей, как и любая другая наука, возникла из потребностей практики. Интуитивно понятия вероятного и случайного всегда связываются с неоднозначностью и непредсказуемостью наблюдаемых явлений. Так, например, при бросании монеты невозможно предсказать, упадёт она орлом или решкой. Легче рассчитать движение небесных светил, чем ответить на этот вопрос! Такая непредсказуемость явления определяется тем, что имеется множество объективных и субъективных причин, учесть которые при исследовании не представляется возможным. Изучение закономерностей мира случайных явлений и составляет предмет теории вероятностей.

Теория вероятностей и математическая статистика – это две стороны одной медали. Теория вероятностей − это фундамент, язык и инструмент. Математическая статистика − это надстройка, применение этого инструмента для познания реального мира. Математическая статистика − наука о методах наблюдения и обработки результатов массовых явлений, в которых фактор случайности имеет немаловажное значение. На практике часто встречаются ситуации, результат которых трудно спрогнозировать. Например, выиграть в лотерею автомобиль – событие случайное. Можно задаться вопросом: зачем нужно изучать степень возможности наступления выигрыша в лотерее автомобиля? Возможно, обычному обывателю и не стоит ничего изучать, а вот организаторам без этого не обойтись. Ведь лотереи проводятся не просто так, а с целью извлечения выгоды (прибыли), а значит, заинтересованность большая. Важно установить, по какой цене нужно продавать билеты лотереи, чтобы получить планируемый доход. Аналогично, страховым компаниям важно понимать степень наступления страхового случая, чтобы сформировать верное страховое вознаграждение (по сути, прибыль компании). Ведь если завысить страховое вознаграждение, то можно потерять определённую долю рынка, что крайне нежелательно, а если занизить – можно остаться банкротом.

Пример. То, что застрахованный дом пострадает или будет уничтожен в течение некоторого периода времени – дело случая. Но страховой орган должен рассчитывать сумму страхового взноса за этот период.

Пример. Сколько времени будет идти автобус с площади Комсомольской до площади Лепсе – дело случая. Но вы должны рассчитать время своего приезда.

Очень часто необходимо предсказывать характер протекания многих процессов, т.е. находить вероятности некоторых сложных событий. Например, необходимо определить (с высокой степенью достоверности) поражение мишени хотя бы одним выстрелом из трёх произведённых, хотя мы легко можем определить вероятность попадания в мишень при одном выстреле. Тогда строят модель таким образом. Полагают известной вероятность события A и с помощью определённых процедур находят вероятности нужных случайных событий.

Определение вероятности появления события по вероятностям элементарных событий, изучение вероятностных закономерностей (различных случайных событий) и является предметом теории вероятностей.

На уроках следует подчеркнуть тесную связь теории вероятностей и статистики с окружающим миром. Надо избегать математического формализма там, где это только возможно. Избегать классических примеров и задач, утративших актуальность. Сопровождать рассказ яркими, доступными и запоминающимися примерами для формирования интереса учащихся и лучшего усвоения материала.

Пример 1 (Теорема о сложении вероятностей несовместных событий). «На один гвоздь всего не вешают». В два банка положены деньги. Банки работают независимо друг от друга. Вероятность разорения первого банка равна 0,1; а второго 0,2. Какова вероятность того, что деньги сохранятся хотя бы в одном из банков?

Решение. Чтобы решить вероятностную задачу, необходимо ввести правильные обозначения. Рассмотрим следующие события:

A_1 – «деньги взяты из первого банка»,

A_2 – «деньги взяты из второго банка».

Тогда событие $A_1 + A_2$ означает, что деньги взяты либо из первого, либо из второго банка, либо из обоих банков сразу. А найти нужно именно вероятность этого события $P(A_1+A_2)$. По формуле сложения вероятностей совместных событий получаем:

$P(A_1+A_2)=P(A_1) +P(A_2) -P(A_1A_2)$.

Вероятность $P(A_1)$ того, что первый банк останется «на плаву», составляет с вероятностью $P(\overline{A_1})$ того, что первый банк разорится, в сумме 1 (т.к. событие $A_1+ \overline{A_1}$ есть достоверное событие). Поэтому: $P(A_1)=1-0,1=0,9$. Аналогично найдем $P(A_2)=1-0,2=0,8$. А вероятность произведения двух событий $P(A_1A_2)$ равна произведению вероятностей $P(A_1)P(A_2)$ как произведение независимых событий. Поэтому:

$P(A_1+A_2)=P(A_1) +P(A_2) -P(A_1A_2)=0,9+0,8-0,9\cdot 0,8=0,98$.

То есть искомая вероятность получается больше вероятностей $P(A_1)$ и $P(A_2)$, а, значит, права пословица!

Пример 2 (Теорема сложения событий. Вероятность произведения нескольких событий). Ученица Мария Кутейкина к зачёту по физике успела выучить только 6 из 16 вопросов, но надеется, что в случае неудачи уговорит преподавателя задать ей второй вопрос. По многолетним наблюдениям, преподавателя можно разжалобить в двух случаях из трёх, и это соотношение не меняется с годами. Каковы Машины шансы сдать зачёт?

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Пример 3. Измерительный прибор состоит из трёх элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

Указание. Пусть событие A_i – «i-й элемент работает безотказно», i=1,2,3. В каждом случае искомое событие следует представить, как сумму несовместных событий. Например, в случае в) реализуется единственное событие $A_1A_2A_3$.

Ответ: а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.

Пример 4. При одном цикле обзора радиотелескопа, следящего за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

Указание. Удобнее перейти к противоположному событию, которое состоит в том, что при одном цикле наблюдения объект не обнаруживается, и найти сначала вероятность не обнаружить объект за n циклов.

Ответ: $1-(1-p)^n$.

Пример 5. Ученик разыскивает нужную ему формулу в трёх справочниках. Вероятность того, что формула окажется в первом справочнике, равна 0,6, во втором – 0,7, в третьем – 0,8. Какова вероятность того, что формула окажется: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трёх справочниках; г) хотя бы в одном справочнике; д) ни в одном справочнике; е) хотя бы в двух справочниках; ж) только в первом справочнике; з) только во втором справочнике; и) не менее чем в двух справочниках.

Пример 6. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к сезону весна-лето, создаёт модели в зелёной, чёрной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зелёный цвет будет в моде весной равна 30%, что чёрный – 60%, а вероятность того, что в моде будет красный цвет равна 40%. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что: а) цветовое решение коллекции будет удачным более чем по одному цвету; б) в моде весной будет преобладать только красный цвет; в) в моде весной будет хотя бы один из указанных цветов.

Пример *7* (Формула полной вероятности. Формула Байеса). В городе 5 банков, три из них («хорошие» банки) разорятся с вероятностью 0,05, два («плохие» банки) – с 0,3. Найти вероятность сохранения вклада, если деньги доверены наудачу одному из банков. (Общая ситуация: вы никогда не знаете наверняка вероятность сохранения вашего вклада).

Решение. Введём соответствующие обозначения: событие B_1 – «деньги доверены «хорошему» банку»; событие B_2 – «деньги доверены «плохому» банку»; событие A – «деньги сохранены». Тогда можно найти вероятность того, что деньги сохранятся в «хорошем» банке (деньги будут сохранены, при условии того, что они будут доверены «хорошему» банку): *p* (A/B_1) =1 − 0,05 = 0,95, т.к. эта вероятность в совокупности с вероятностью разорения «хорошего» банка даст единицу (достоверное событие). Аналогично находится вероятность того, что деньги сохранятся в «плохом» банке (деньги будут сохранены при условии того, что они будут доверены «плохому» банку): $p(A/B_2)=1-0,3=0,7$. Теперь можно найти вероятность того, что деньги доверены «хорошему» банку (по классическому способу нахождения вероятности событий, число 3 равно числу благоприятствующих случаев, а всего 5 банков): $p(B_1)=3/5=0,6$ и «плохому» банку (по классическому способу нахождения вероятности событий, а число 2 равно числу благоприятствующих случаев): $p(B_2)=2/5=0,4$. Тогда по формуле полной вероятности: $p(A)=p(B_1)p(A/B_1)+p(B_2)\,p(A/B_2)=0,6\cdot 0,9+0,4\cdot 0,7=0,57+0,28=0,85$. Т.е. вероятность оказалась «размытой по середине» между вероятностью сохранить деньги в «хорошем» банке и вероятностью сохранить в «плохом» банке.

Пример 8. В шкафу для хранения оружия пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Ответ: 0,85.

Пример 9. В городе находится 10 банков. Вероятность того, что деньги сохранятся в 4-х банках («хороших») равна 0,95, а в остальных банках («плохих») равна 0,8. Вкладчик сохранил деньги в наудачу взятом банке. (Общая ситуация: вы никогда не знаете наверняка, в каком именно банке храните деньги: в «хорошем» или в «плохом»).

Что вероятнее: вкладчик держал деньги в «хорошем» банке или в «плохом»?

Решение. Введём обозначения: событие A − деньги сохранены; событие B_1 − выбран «хороший» банк; событие B_2 − выбран «плохой» банк. Причём события B_1 и B_2 как раз и образуют полную группу (т.к. в какой-то банк положены деньги) несовместных (т.к. деньги хранились лишь в одном из банков) событий. Тогда можно найти следующие вероятности: $P(A/B_1)=0,95$ − вероятность того, что деньги сохранятся, если выбран «хороший» банк; $P(A/B_2)=0,8$ − вероятность того, что деньги сохранятся, если выбран «плохой» банк; $P(B_1)=0,4$ − вероятность того, что выбран «хороший» банк (определяется по классическому способу нахождения вероятности событий, а число 4 равно числу благоприятствующих случаев); $P(B_2)=0,6$ − вероятность того, что выбран «плохой» банк (определяется по классическому способу нахождения вероятности событий, а число 6 равно числу благоприятствующих случаев). Тогда $P(B_1/A)$ (вероятность того, что был выбран «хороший» банк при условии, что деньги были сохранены) равна, по формуле Байеса:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B1)P(A|B1)}{P(B1)P(A|B1)+P(B2)P(A|B2)} = \frac{0,4\cdot 0,95}{0,4\cdot 0,95+0,6\cdot 0,8} = \frac{0,38}{0,38+0,48} = \frac{38}{86} = \frac{19}{43} < \frac{1}{2}$$

То есть вероятнее, что был выбран «плохой» банк при условии, что деньги были сохранены.

Пример 10. Ученица Мария Кутейкина вместе с подругой готовилась к зачёту. Они успели выучить только 15 вопросов из 30. По жребию Марии выпало идти первой, а её подруге – второй. Мария считает, что подруге повезло больше, так как шансы вытянуть счастливый билет увеличатся. Права ли она? Зависит ли вывод от числа выученных билетов?

Указание. Для вычисления вероятности вытянуть счастливый билет подругой, которая подходит второй, нужно воспользоваться формулой полной вероятности.

Ответ: вероятность вытянуть нужный билет не зависит от того, какой по очереди Мария подойдёт за билетом. Этот вывод не зависит от количества выученных билетов.

Пример 11. Среди посетителей кафе «Улыбка» 30% мужчин, 30% женщин, 40% детей. Мужчина заказывает пирожное с вероятностью 0,1; женщина – с вероятностью 0,5; ребёнок − с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что случайный посетитель закажет пирожное?

Ответ: 0,46.

Пример 12. Любимое занятие двухлетней девочки Даши − срезать пуговицы с одежды. Пока мама готовила завтрак, Даше удалось срезать все 5 синих пуговиц с папиной пижамы и 3 чёрных пуговицы с маминого вечернего платья. Одну пуговицу Даша утопила, а остальные засунула под шкаф. За этим занятием её и застала мама. С большим трудом мама сумела достать из-под шкафа 2 пуговицы. Какова вероятность того, что платье можно привести в порядок, если одна запасная пуговица у мамы есть?

Указание. Мама сможет починить платье, если достанет 2 чёрные пуговицы. Пусть событие A − «мама достала 2 чёрные пуговицы». Возможны две гипотезы: B_1 − «утоплена синяя пуговица» и B_2 − «утоплена чёрная пуговица». Для вычисления $P(A)$ использовать формулу полной вероятности. *Ответ*: 13/28.

Пример 13. В шкафу для хранения оружия 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Ответ: вероятность того, что винтовка была без оптического прицела, равна 24/43; с оптическим прицелом − 19/43.

Пример 14. У Ивана имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте − с вероятностью p_2; на третьем − с вероятностью p_3. Известно, что Иван свято верит в магию числа

3 и, придя на выбранное место, закидывает удочку ровно три раза. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте, если рыбак вернулся с одной рыбой.

Ответ: $\dfrac{p_1(1-p_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_i(1-p_i)^2}$.

Пример 15. На сборочное предприятие поступили двигатели от трёх моторных заводов: Ярославского, Уфимского, Заволжского. От Ярославского завода поступило 10 двигателей, от Уфимского − 6 и от Заволжского − 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефектов двигатель изготовлен на Ярославского заводе.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события установки на машину двигателей, изготовленных соответственно на первом, втором и третьем моторных заводах. Вероятности этих событий таковы: $P(A_1)=0{,}5$; $P(A_2)=0{,}3$; $P(A_3)=0{,}2$.

а) Вероятность того, что наугад взятый двигатель проработает без дефектов, найдём по формуле полной вероятности:

$P(B)=P(A_1)\cdot P(B\backslash A_1) + P(A_2)\cdot P(B\backslash A_2) + P(A_3)\cdot P(B\backslash A_3),$

$P(B)= 0{,}5\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}83.$

б) Если двигатель проработал без дефектов гарантийный срок, то вероятность, что он изготовлен на Ярославском заводе, найдём по формуле Байеса: $P(A_1)\cdot P(B\backslash A_1)/P(B)=45/83$.

Пример 16 (схема Бернулли). Папа пообещал купить Косте Серову гироскутер, когда Костя сумеет выиграть у него 20 партий в шахматы. Они договорились каждый день играть одну партию, которая с одинаковой вероятностью может завершиться вничью, победой Кости или его поражением. Когда надо начинать матч, чтобы шансы получить гироскутер к 1 мая были максимальными?

Указание. Оценить число матчей, которое нужно сыграть, чтобы вероятность выиграть 25 партий была максимальной.

Ответ: нужно рассчитывать на число партий $59\le n \le 62$, т. е. матч следует начинать примерно 1 марта.

Пример 17. По многолетним наблюдениям, в районе обсерватории из 30 ноябрьских ночей ясных бывает в среднем 10. Группе астрономов, собирающихся сделать мировое открытие, выделено 5 ночей для наблюдений. Найти вероятность того, что мировое открытие будет совершено, если для этого требуются по крайней мере 2 ясные ночи.

Указание. Пусть событие A − «из 5 ночей будет по крайней мере 2 ясные». Противоположное событие $\bar{A}$ − «ни одной ясной ночи или одна ясная ночь из 5».

$P(\bar{A}) = P_5(0) + P_5(1).$

Ответ: 131 /243 ≈ 0,539.

Пример 18. На контрольной работе предлагается решить 5 задач. Решённая задача оценивается в 2 балла, наполовину решенная − в 1 балл, за нерешённую задачу баллы не начисляются. Чтобы получить положительную оценку, необходимо набрать не менее 8 баллов. Какова вероятность написать контрольную работу у ученицы Марии Кутейкиной, если из десяти задач она в среднем решает 6 и наполовину решает 3, а одну решить никак не может.

Ответ: 0,53136.

Пример 19. Два равносильных шахматиста играют в матч из n результативных партий. Ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырёх? б) выиграть не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти?

Указание. Поскольку шахматисты равносильны, то вероятности успеха и неудачи равны: $p = q = 1/2$. Вероятности событий вычисляются по формуле Бернулли.

Ответ. а) Вероятнее выиграть одну партию из двух: $P_2(1) = 1/2$, $P_4(2) = 3/8$;

б) Вероятнее выиграть не менее двух партий из четырёх:

$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 – P_4(0) – P_4(1) = 11/16 = 0{,}6875$,

$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 8/16 = 0{,}5$.

Пример 20. Владельцы бонусных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели пластиковую карточку для произвольного владельца равна 0,002. Всего торговый центр выдал карточки 2165 клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) ровно одна карточка; б) хотя бы одна карточка; г) чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более 3 карточек?

Ответ: а) вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна ровно одна карточка, равна 0,057;

б) вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна хотя бы одна карточка, равна: 0,9868;

в) вероятность того, что в предстоящую неделю будут потеряны более 3 карточек, равна: 0,6282.

Пример 21 (случайные величины). В наборе из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Ответ. Случайная величина ξ имеет распределение

Xi	0	1	2
Pi			

Пример 22. После ответа десятиклассника на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задаёт ученику дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только ученик обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что ученик ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется: а) составить закон рас-

пределения случайной дискретной величины ξ − числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель десятикласснику; б) найти наивероятнейшее число заданных десятикласснику дополнительных вопросов.

Указание. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение. Наивероятнейшее число вопросов может быть определено непосредственно из ряда распределения.

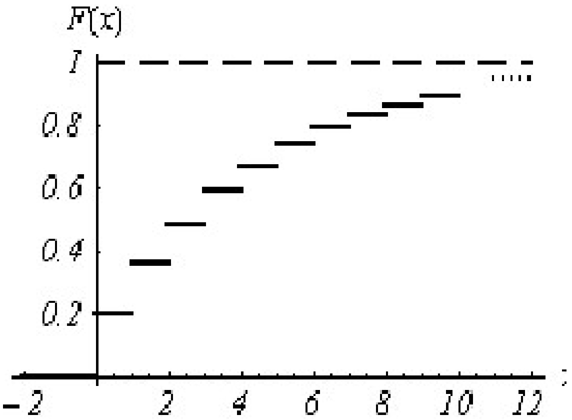
Ответ: а) $P(\xi = n) = 0{,}9^{n-1}\,0{,}1$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ − число вопросов; б) 1.

Пример 23. На стрельбище стрелку, попавшему в мишень, выдаётся призовой патрон для следующего выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле 0,8. Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ − числа патронов, выданных стрелку, если он купил только один патрон. Построить функцию распределения.

Решение. Очевидно, что вероятность не получить патронов равна вероятности промахнуться первым выстрелом: $P(\xi = 0) = 0{,}2$. Стрелок получит только один патрон, если попадёт первым выстрелом и промахнётся вторым. В силу независимости попаданий при каждом выстреле эта вероятность есть $P(\xi=1)=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$. Аналогично можно вычислить вероятность получения m патронов: $P(\xi=m)=0{,}8^{m}\cdot 0{,}2$. Закон распределения примет вид:

Xi	0	1	2	…	m	…
Pi	0,2	0,16	0,128	…	$0{,}8^{m}\cdot 0{,}2$	…

Функция распределения показана на рисунке:



Данное распределение является геометрическим.

Пример 24 (числовые характеристики случайных величин). Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

Указание. В качестве случайной величины ξ взять сумму очков на всех костях, а ξ_k − количество очков, выпавших на k – й кости ($k = 1, 2, \ldots, n$). Величины ξ_k независимы, имеют одинаковое распределение, и $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

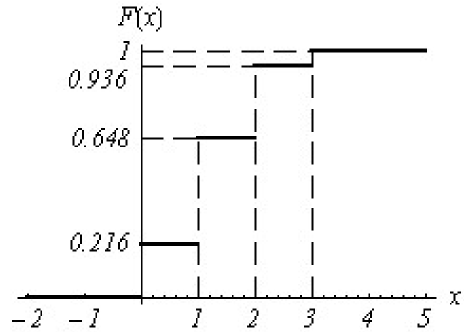
Ответ: $7n/2$.

Пример 25. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Рассматривается случайная величина ξ − число попаданий при трёх выстрелах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ. Найти её математическое ожидание и дисперсию.

Указание. Случайная величина имеет биномиальное распределение.

Ответ: ряд распределения имеет вид:

Xi	0	1	2	3
Ppi	0,216	0,432	0,288	0,064



Функция распределения имеет график.

$M\xi$ =1,2, $D\xi$ = 0,72, $\sigma\xi$ = 0,8485.

Пример 26. На пути движения рыбы к месту нереста находятся 4 шлюза. Вероятность прохода рыбы через каждый шлюз 0,6. Построить ряд распределения *СВ X* – число шлюзов, пройденных рыбой до первого задержания у шлюза. Найти *M* (*X*), *D*(*X*),

Ответ. *M*(*X*)=2,04, *D*(*X*)=1,4784, σ(*X*)=1,216, график функции распределения будет выглядеть как ступенчатая линия, начинающаяся в точке (0, 16/625), затем поднимающаяся в точку (1, 112/625), далее (2, 256/625), (3,364/625) и заканчивающаяся в точке (4,1)).

Вероятность на уроке: отрабатываем ключевые темы на практических заданиях

Ольга Геннадьевна Верещагина,
учитель математики
КОГОАУ «Кировский физико-математический лицей»

Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

Задание 1. Три охотника производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого охотника – 0,3; для второго – 0,9; для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что: а) в цель попадёт только первый охотника; б) в цель попадут два охотника; в) хотя бы один охотник попадёт в цель.

Ответ: а) 0,012; б) 0,504; в) 0,972.

Задание 2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,5; второй – 0,6; третий – 0,9. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) не менее двух экзаменов; б) менее трёх экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

Ответ: а) 0,75; б) 0,73; в) 0,98.

Задание 3. Три карьерных экскаватора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый экскаватор в течение смены выйдет из строя, равна 0,1; второй – 0,2 и третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из стоя: а) менее двух экскаваторов; б) два экскаватора; в) более двух экскаваторов.

Ответ: а) 0,902; б) 0,092; в) 0,006.

Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Задание 1. На автомобильный завод поступили однотипные комплектующие с трёх предприятий в количестве: 10 – с первого предприятия, 25 – со второго предприятия, 15 – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом предприятии 0,9; на втором – 0,85; на третьем – 0,7. а) Какова вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным? б) Взятое случайным образом изделие оказалось качественным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором предприятии.

Ответ: а) 0,815; б) 0,521.

Задание 2. Статистика запросов кредитов в банке такова: 39% – от бизнес-организаций, 12% – от других банков, остальное – от физических лиц. Вероятности невозврата кредита в оговоренный срок соответственно равны 0,02; 0,03 и 0,01. **а)** Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. **б)** Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Кто наиболее вероятно из клиентов не возвращает кредит?

Ответ: а) 0,0163; б) бизнес-организации.

Задание 3. В группе студентов решают задачу. Известно, что 7 студентов учатся на «отлично», 10 на «хорошо» и 8 на «удовлетворительно». Вероятность того, что задача будет решена отличником равна 0,66; хорошистом – 0,22; посредственным студентом – 0,08. а) Какая вероятность решения задачи? б) Студентом решена задача. Найти вероятность того, что он учится на «удовлетворительно».

Ответ: а) 0,2984; б) 0,0858.

Повторение независимых испытаний

Задание 1. Банк в городе N имеет 8 офисов. С вероятностью 0,2 независимо от других каждый офис может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: а) хотя бы одна заявка; б) ровно 3 заявки; в) как минимум 3 заявки?

Ответ: а) 0,8322; б) 0,1468; в) 0,2031.

Задание 2. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 13 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Ответ: $P_{13(4)}$=0,234.

Задание 3. Владельцы бонусных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели бонусную карточку для произвольного владельца равна 0,002. Всего торговый центр выдал карточки 2165 клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) ровно одна карточка; б) хотя бы одна карточка; г) чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более 3 карточек?

Ответ: а) 0,057; б) 0,9868; в) 0,6282.

Случайные величины. Дискретные случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики ДСВ. Числовые характеристики

Задание 1. Байкер должен проехать по улице, на которой установлено 4 светофора, дающих независимо друг от друга зелёный сигнал в течение t_1=1,55 минуты, жёлтый – в течение t_2=0,35 минуты, красный – в течение t_3=1,20 минуты. Требуется: а) составить закон распределения случайной величины *X* − числа остановок байкера на улице; б) найти математическое ожидание и дисперсию величины *X*; в) каково среднее число остановок байкера на данном пути?

Ответ: а) Закон распределения случайной величины *X*:

X	0	1	2	3	4
p	0,0625	0,2500	0,3750	0,2500	0,0625

б) математическое ожидание 2, дисперсия величины X 1; в) ожидаемое число остановок автомобиля на данной улице равно 2.

Задание 2. Из урны, содержащей 3 белых и 5 чёрных шаров, извлекаются 3 шара. Пусть СВ X – число вынутых чёрных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Ответ: закон распределения для данной *СВ X* имеет вид:

X	0	1	2	3
P	1/56	15/56	30/56	10/56

$M(X)$=1,875; $D(X)$=0,5024; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}5024} = 0{,}71$.

Задание 3. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно a=280 (мм), среднее квадратичное отклонение равно σ =0,8 (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключён в рамках между α =278 и β=283 (мм). Определить: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением σ_1=0,9 (мм).

Ответ: а) 0,9908; б) вероятность изготовления бракованной детали при ухудшении точности её изготовления равна 0,0145. Это значит, что в среднем брак будет составлять 1,45%.

Задания для индивидуальной работы

Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

1. Три охотника производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого охотника – p_1, для второго охотника – p_2, для третьего охотника – p_3. Найти вероятность того, что: а) в цель попадёт только первый охотник; б) в цель попадут два охотника; в) хотя бы один охотника попадёт в цель.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
p_1	0,7	0,5	0,4	0,8
p_2	0,8	0,3	0,5	0,7
p_3	0,6	0,9	0,8	0,5

2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна p_1, второй − p_2, третий − p_3. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) не менее двух экзаменов; б) менее трёх экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
p_1	0,6	0,9	0,2	0,3
p_2	0,7	0,2	0,4	0,5
p3	0,6	0,3	0,6	0,7

3. Три карьерных экскаватора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый экскаватор в течение смены выйдет из строя, равна p_1, второй экскаватор – p_2 и третий экскаватор – p_3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) менее двух экскаваторов; б) два экскаватора; в) более двух экскаваторов.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
p_1	0,3	0,3	0,4	0,3
p_2	0,4	0,2	0,4	0,1
p_3	0,6	0,4	0,6	0,5

Формула полной вероятности. Формулы Байеса

1. На сборочное предприятие поступили двигатели от трёх моторных заводов: Ярославского (1), Уфимского (2), Заволжского (3) в количестве: n_1 – с Ярос-

лавского завода, n_2 – с Уфимского завода, n_3 – с Заволжского. Вероятность качественного изготовления изделий на Ярославском заводе – p_1, на Уфимском – p_2, на Заволжском – p_3. Какова вероятность того, что: а) случайно взятое изделие будет качественным; б) взятое случайным образом изделие оказалось качественным; найти вероятность того, что оно изготовлено на i-м предприятии.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
n_1	20	14	16	30
n_2	15	26	40	20
n_3	15	10	44	50
p_1	0,9	0,8	0,8	0,9
p_2	0,9	0,9	0,9	0,7
p_3	0,8	0,8	0,7	0,7
i	2	3	1	2

2. Статистика запросов кредитов в банке такова: α% – от бизнес-организаций, β% – от других банков, остальное – от физических лиц. Вероятности невозврата кредита в оговорённый срок соответственно равны p_1, p_2, p_3. а) Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. б) Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Кто наиболее вероятно из клиентов не возвращает кредит?

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
α%	22	25	26	12
β%	58	38	38	48
p_1	0,01	0,06	0,03	0,02
p_2	0,05	0,01	0,04	0,03
p_3	0,04	0,03	0,05	0,03

3. В группе студентов решают задачу. Известно, что k студентов учатся на «отлично», l на «хорошо» и m на «удовлетворительно». Вероятность того, что задача будет решена отличником равна p_1; хорошистом – p_2; посредственным студентом – p_3. а) Какая вероятность решения задачи? б) Студентом решена задача; найти вероятность того, что он учится на «удовлетворительно».

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
k	3	4	4	2
l	17	16	14	20

m	5	6	7	3
p_1	0,65	0,63	0,78	0,75
p_2	0,35	0,25	0,3	0,24
p_3	0,13	0,15	0,12	0,13

Повторение независимых испытаний

1. Банк в городе G имеет n офисов. С вероятностью p независимо от других каждый офис может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: а) хотя бы одна заявка; б) ровно r заявок; в) как минимум s заявок?

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
n	6	5	7	5
p	0,2	0,3	0,3	0,4
r	2	3	4	1
s	4	4	6	4

2. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
p	0,4	0,4	0,5	0,4
n	12	15	12	12

3. Владельцы бонусных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели бонусную карточку для произвольного владельца равна p. Всего торговый центр выдал карточки n клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) ровно одна карточка; б) хотя бы одна карточка. Чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более r карточек?

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
n	2000	3000	2500	2500
p	0,002	0,001	0,002	0,001
r	2	3	2	2

Случайные величины. Дискретные случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики ДСВ. Числовые характеристики

1. Байкер должен проехать по улице, на которой установлено n светофоров, дающих независимо друг от друга зелёный сигнал в течение t_1 минут, жёлтый – в течение t_2 минут, красный – в течение t_3 минут. Требуется: а) составить закон распределения случайной величины X – числа остановок байкера на улице; б) найти математическое ожидание и дисперсию величины X; в) каково среднее число остановок байкера на данном пути?

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
n	4	3	4	3
t_1	1,6	1,8	1,3	1,8
t_2	0,4	0,3	0,1	0,2
t_3	1,1	1,3	1,1	1,3

2. Из урны, содержащей n белых и m чёрных шаров, извлекаются k шаров. Пусть *СВ* X – число вынутых чёрных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
n	10	9	8	7
m	5	6	6	5
k	4	3	2	4

3. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно a (мм), среднее квадратичное отклонение равно σ (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключён в рамках между α и β (мм). Определить: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением σ_1(мм).

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***
a	275	290	300	250
σ_1	0,4	0,9	0,7	0,8
σ	0,9	0,8	0,5	0,6
α	273	288	292	249
β	277	292	301	253

Задачи по теме «Операции над множествами и событиями. Сложение и умножение вероятностей. Условная вероятность. Независимые события»

Марина Миннуровна Галеева,
учитель математики КОГОБУ «Лицей г. Советска»

Задача 1. Суводский лесхоз-техникум − одно из старейших в России лесохозяйственных учебных заведений. Располагает дендропарком, мастерской, охотничьим хозяйством, питомником и благоустроенным общежитием. Техникум ведёт обучение по нескольким специальностям.

На первом курсе очной формы в Суводском лесхоз-техникуме обучаются по специальности «Землеустройство» 25 студентов, «Информационные системы и программирование» – 23 студента, «Лесное и лесопарковое хозяйство» – 47 студентов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный студент обучается по одной из специальностей «Землеустройство» или «Информационные системы и программирование». Ответ округлите до сотых.

Решение. Общее количество студентов-первокурсников 25 + 23 + 47 = 95.

Пусть событие А – «студент обучается по специальности «Землеустройство», событие В – «студент обучается по специальности «Информационные системы и программирование». Так как студент не может обучаться по двум специальностям одновременно, то события А и В являются несовместными.

По теореме о вероятности суммы несовместных событий имеем:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{25}{95}+\frac{23}{95}=\frac{48}{95}\approx 0{,}51\,.$$

Ответ: 0,51.

Задача 2. В городах Советск и Зуевка Кировской области расположены фабрики домашнего печения «Сладкая Слобода», которые производят печенье, вафли, пряники и другие кондитерские изделия.

Фабрика в городе Советске производит 53% всего печенья компании, в городе Зуевка − 47%. К серии «Деревенское» относится 15% печенья Советской фабрики и 24% печенья Зуевской фабрики. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине печенье этой фирмы окажется из серии «Деревенское».

Решение. Пусть событие А – «купленное в магазине печенье фабрики «Сладкая Слобода» из серии «Деревенское», событие H_1 – «печенье произведено на фабрике г. Советска», событие H_2 – «печенье произведено на фабрике г. Зуевка».

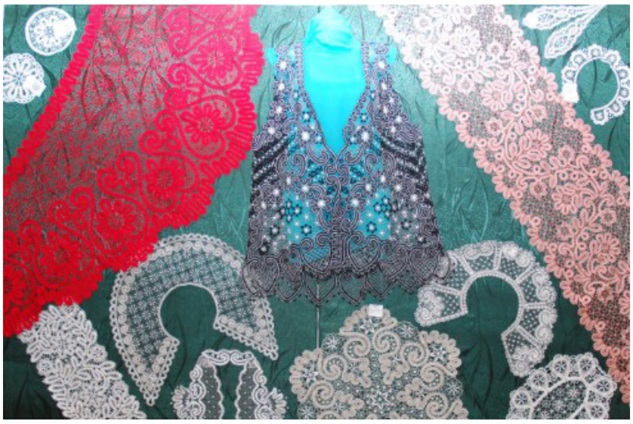
По условию: $P(H_1)=0{,}53$, $P(H_2)=0{,}47$, $P(A/H_1)=0{,}15$, $P(A/H_2)=0{,}24$.

Применим формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=0{,}53\cdot 0{,}15+0{,}47\cdot 0{,}24=0{,}0795+0{,}1128=0{,}1923$$

Ответ: 0,1923.

Задача 3. Кукарское кружево − визитная карточка Кировской области. Получило название по месту своего возникновения (слобода Кукарка Вятской губернии). В 2024 году уникальная Вятская снежинка, исполненная в технике кукарского кружева, стала символом проекта «Киров – Новогодняя столица России». В настоящее время кукарские (вятские) кружева плетутся в городе Советске и селе Ильинск Советского района.



В фестивале кукарского кружева принимают участие 6 кружевниц из Ильинска и 14 кружевниц из Советска. Порядок представления изделий участницами определяется жребием. Найдите вероятность того, что первой и второй свои работы представят кружевницы из Ильинска. Ответ округлите до сотых.

Решение. Всего кружевниц 6 + 14 = 20. Пусть событие А – «первой выступает кружевница из Ильинска», событие В – «второй выступает кружевница из Ильинска».

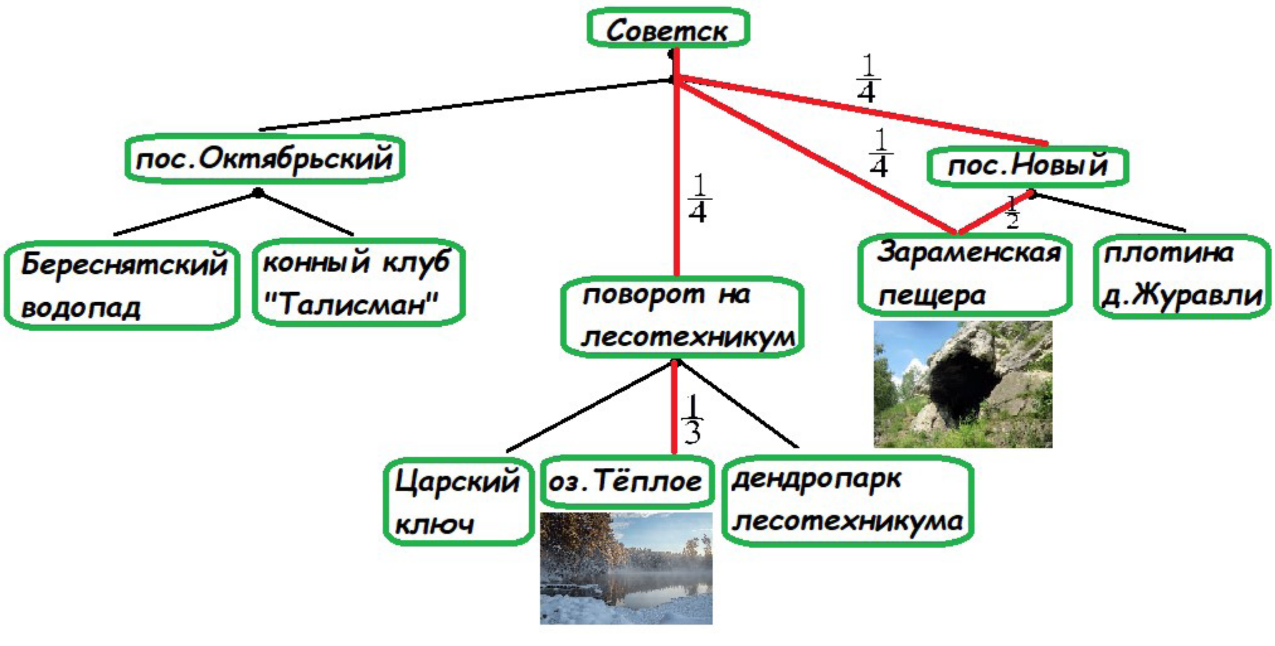
Вероятность события В зависит от появления события А, поэтому применим формулу вероятности произведения зависимых событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}=\frac{3}{38}\approx 0{,}08\ .$$

Ответ: 0,08.

Задача 4. Город Советск и Советский район богаты живописными местами и привлекают множество туристов. Турист Алексей изучает достопримечательности Советского района. Он выезжает из города Советска и движется по дорогам, которые показаны на рисунке. На каждой развилке Алексей равновероятно выбирает дальнейший путь, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что он попадёт в Зараменскую пещеру или на озеро Тёплое в селе Суводь.

Решение. Схема дорог представляет собой дерево случайного эксперимента «Путешествие туриста Алексея». По условию все рёбра, исходящие из одной вершины, равновероятны. Выделим цветом цепочки, ведущие к пещере и озеру. Подпишем вероятности вдоль цепочек, ведущих к Зараменской пещере и озеру Тёплому.



Пусть событие А – «Алексей попал в Зараменскую пещеру», событие В – «Алексей попал на озеро Тёплое». Вычисли искомую вероятность:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\left(1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}\right)+1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{11}{24}$$

Ответ: $\frac{11}{24}$.

Задача 5. Дымковская игрушка – один из русских народных глиняных художественных промыслов. Возник в заречной слободе Дымково, ныне входящей в городскую черту Кирова. Дымковская игрушка стала одним из символов Кировской области, подчёркивающим самобытность Вятского края, его древнюю историю. Наиболее распространённые сюжеты: няньки с детьми, барыни и молодые люди, бараны, индюшки. Реализуется дымковская игрушка в сувенирных магазинах. Самые крупные из них в городе Кирове: гипермаркет «Матрёшка», лавка подарков «Полка» и галерея «Время подарков».

Вероятность того, что дымковские игрушки закончатся к выходным в магазине «Матрёшка» – 0,1; в магазине «Полка» – 0,15; в галерее «Время подарков» – 0,07. Найдите вероятность того, что дымковские игрушки останутся хотя бы в одном из трёх магазинов. Считайте, что игрушки в магазинах заканчиваются независимо друг от друга.

Решение. Пусть событие А – «дымковские игрушки останутся хотя бы в одном магазине из трёх», событие $\bar{A}$ – «дымковские игрушки закончатся во всех трёх магазинах». Вычислим вероятность события $\bar{A}$, используя теорему о вероятности произведения независимых событий:

$$P(\overline{A})=0{,}1\cdot 0{,}15\cdot 0{,}07=0{,}00105 .$$

Далее по теореме о вероятности противоположных событий вычислим вероятность события А:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}00105=0{,}99895 .$$

Ответ: 0,99895.

Основы теории графов: от определений к решению задач

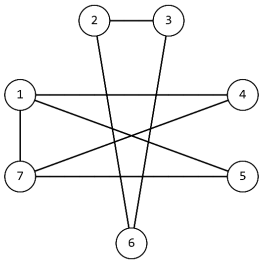
Мария Игоревна Двинянинова,
учитель математики
КОГОАУ «Кировский физико-математический лицей»

Понятие графа

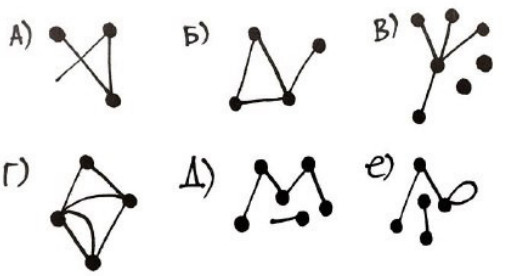
Основные понятия: граф, вершина, ребро, изолированная вершина, петля, кратные рёбра, мультиграф, полный граф, изоморфные графы, планарный граф.

Задача 1. В стране N семь городов, названных цифрами от 1 до 7. Известно, что некоторые из городов соединены дорогами: 1 ↔ 5, 1 ↔ 7, 2 ↔ 3, 2 ↔ 6, 3 ↔ 6, 4 ↔ 7, 5 ↔ 7, 4 ↔ 1. Верно ли, что из любого города можно добраться в любой другой?

Ответ: нет, неверно.

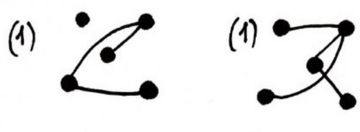


Задача 2. Выберите из предложенных схем те, которые не являются графами.



Ответ: а, д.

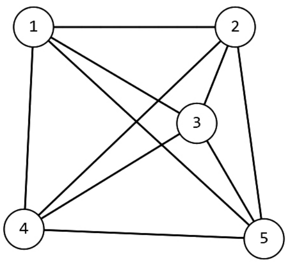
Задача 3. На рисунке изображены графы. Сколько у каждого из них
а) рёбер;
б) вершин;
в) изолированных вершин?

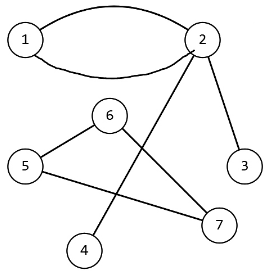


Ответ: а) 1 – 3 ребра, 2 – 6 рёбер. б) 1 – 5 вершин, 2 – 7 вершин. в) 1 – 1 изолированная вершина, 2 – 0 изолированных вершин.

Задача 4. Граф под цифрой (1) из задания №3 сделайте полным, а под цифрой (2) – мультиграфом. Постройте полученные графы. Сколько рёбер у новых графов?

Ответ:

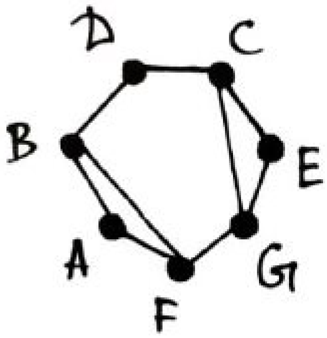




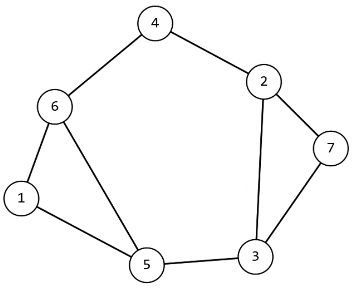
1 – 10 рёбер, 2 – 7 рёбер.

Задача 5. Граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Установите соответствие между вершинами этих представлений графа.

	1	2	3	4	5	6	7
1					*	*	
2			*	*			*
3		*			*		*
4		*				*	
5	*		*			*	
6	*			*	*		
7		*	*				

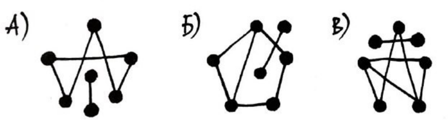


Ответ:

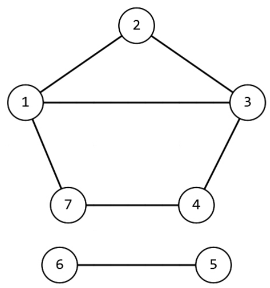


A – 1, B – 6, C – 2, D – 4, E – 7, F – 5, G – 3 или
A – 7, B – 2, C – 6, D – 4, E – 1, F – 5, G – 3.

Задача 6. Среди графов, изображённых на рисунке, выберите изоморфные графы, постройте для выбранных графов планарный изоморфный им граф.



Ответ: б, в.

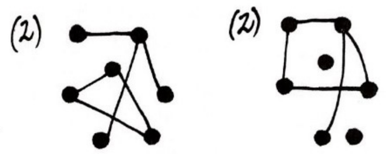


Ключевая задача: На рисунке изображены графы. Сколько у каждого из них

а) рёбер;

б) вершин;

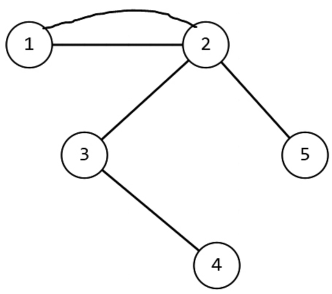
в) изолированных вершин?

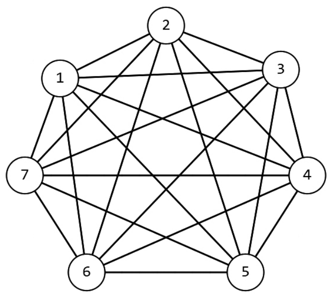


Граф под цифрой (2) сделайте полным, а под цифрой (1) планарным мультиграфом. Постройте полученные графы. Сколько рёбер у новых графов?

Ответ:

а) 1 – 4 ребра, 2 – 5 рёбер. б) 1 – 5 вершин, 2 – 7 вершин. в) 1 – 0 изолированных вершин, 2 – 2 изолированные вершины.





1 – 5 рёбер, 2 – 21 ребро.

Степень вершины графа

Основные понятия: степень вершины.

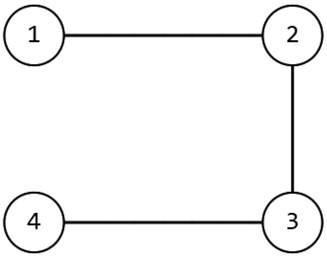
Теорема 1. Сумма степеней всех вершин в графе вдвое больше количества рёбер.

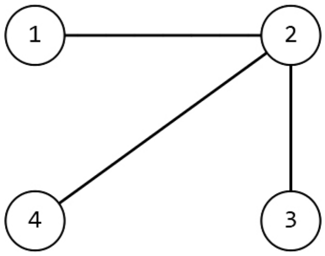
Теорема 2. В любом графе сумма степеней всех вершин является чётным числом.

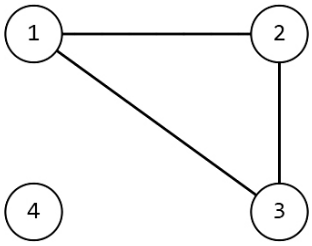
Теорема 3. В любом графе количество вершин нечётной степени чётно (лемма о рукопожатиях).

Задача 1. Изобразите три разных графа, у которых три ребра, четыре вершины. Найдите сумму степеней вершин каждого графа.

Ответ:



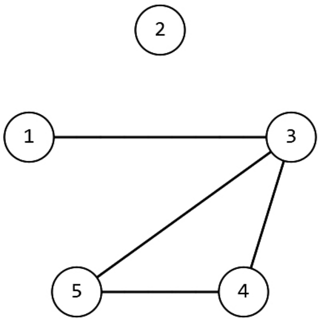




Сумма степеней = 6.

Задача 2. В графе 5 вершин, степени которых равны: 1; 0; 3; 2; 2. Сколько рёбер в этом графе? Нарисуйте пример такого графа.

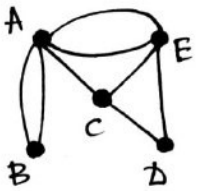
Ответ: 4 ребра.



Задача 3. У графа 7 вершин степени 4 и ещё 6 вершин степени 3. Сколько рёбер в этом графе?

Ответ: $(7{\cdot}4 + 6{\cdot}3) : 2 = 23$.

Задача 4. Найдите сумму степеней вершин изображённого на рисунке графа и уменьшите найденную сумму на количество рёбер графа. В ответ запишите данное число.



Ответ: 8.

Задача 5. В классе 15 компьютеров. Можно ли их соединить друг с другом так, чтобы каждый компьютер был соединён ровно с пятью другими?

Ответ: нет.

Задача 6. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Можно ли из столицы долететь в Дальний (возможно, с пересадками)?

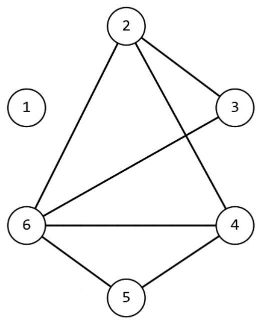
Решение: рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Предположим, что она не содержит город Дальний. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин – по 20 рёбер. Таким образом в этом подграфе ровно одна нечётная вершина. Противоречие с Т3. Значит добраться из столицы в Дальний можно.

Задача 7. В шахматном кружке занимается 6 девочек и 10 мальчиков. На одном из занятий они играли между собой в шахматы. Каждый мальчик сыграл по 5 партий, а каждая девочка — по 4. Сколько всего партий было сыграно?

Ответ: $(10 \cdot 5 + 6 \cdot 4) : 2 = 37$.

Ключевая задача: в графе 6 вершин, степени которых равны: 0; 3; 2; 3; 2; 4. Сколько рёбер в этом графе? Нарисуйте пример такого графа.

Ответ:



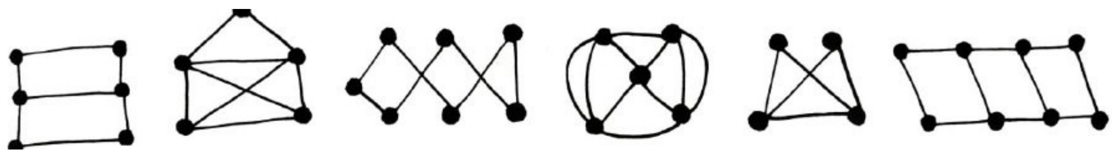
7 рёбер.

Пути в графах

Основные понятия: путь в графе, связные и несвязные графы, простой путь или цепь, простой цикл, эйлеров путь, эйлеров цикл.

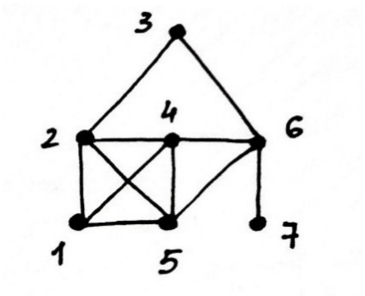
Теорема 1. Если в графе 0 или 2 вершины нечётной степени, то в таком графе существует эйлеров путь. Если вершин нечётной степени две, то они и являются концами эйлерова пути. Если в связном графе нет вершин нечётной степени, то в нём существует эйлеров цикл.

Задача 1. Сколько из изображенных на рисунке графов можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги?



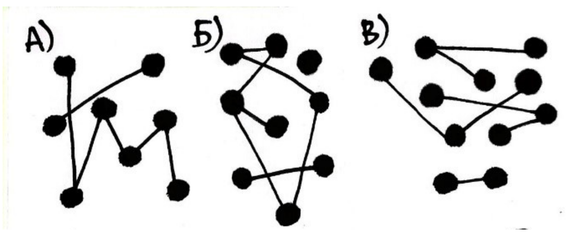
Ответ: 5.

Задача 2. Оля нарисовала схему, не отрывая карандаша от листа бумаги и не проводя никакую линию дважды. В какой точке Оля закончила рисовать схему, если она начала рисовать её в точке 7?



Ответ: 1.

Задача 3. Сколько компонент связности имеет граф? Какое минимальное количество рёбер нужно добавить, чтобы граф стал связным?



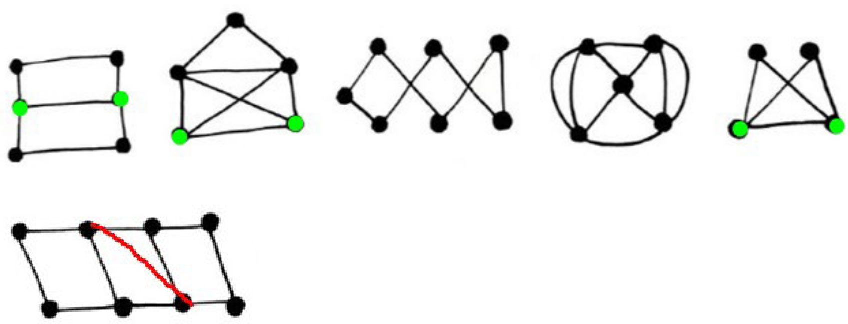
Ответ: а) 2 компоненты, 1 ребро. б) 3 компоненты, 2 ребра. в) 4 компоненты, 3 ребра.

Задача 4. Постройте графы из №1. Для данных графов определите, есть ли в них эйлеров цикл или эйлеров путь:

а) в графах, содержащих эйлеров путь, отметьте начало и конец пути зелёным цветом.

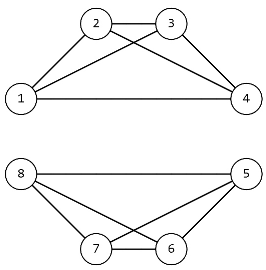
б) в графах, не содержащих эйлеров путь или эйлеров цикл, добавьте ребро/рёбра, чтобы появился эйлеров путь.

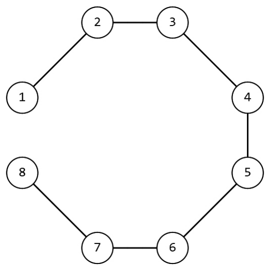
Ответ:

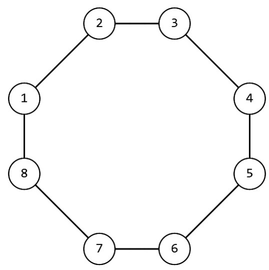


Задача 5. Какое наименьшее число рёбер придётся пройти дважды, чтобы обойти все рёбра тетраэдра и вернуться в исходную вершину?

Ответ: 1.

Ключевая задача: нарисуйте граф, в котором 8 вершин, такой, что:
а) он несвязный, а степень каждой вершины 3;
б) в нём есть эйлеров путь, но нет эйлерова цикла;
в) в нём есть эйлеров цикл.
Ответ:
а) 

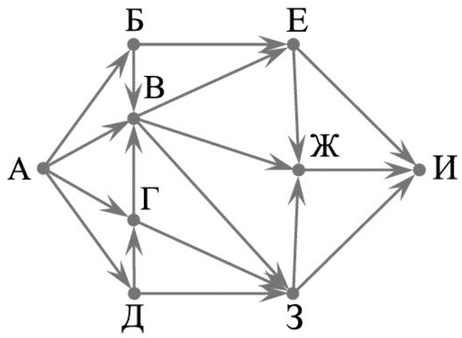
б) 

в) 

Ориентированный граф. Взвешенный граф

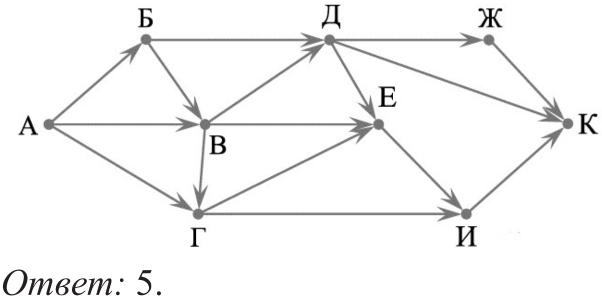
Основные понятия: ориентированный граф, взвешенный граф.

Задача 1. На рисунке − схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город И, проходящих через город В?



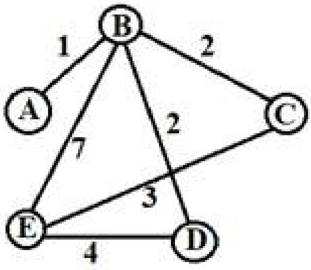
Ответ: 24.

Задача 2. На рисунке − схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К, не проходящих через пункт В?



Ответ: 5.

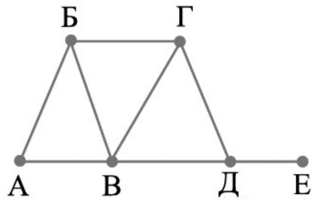
Задача 3. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E построены дороги. Необходимо определить длину кратчайшего пути между пунктами A и E.



Ответ: 6.

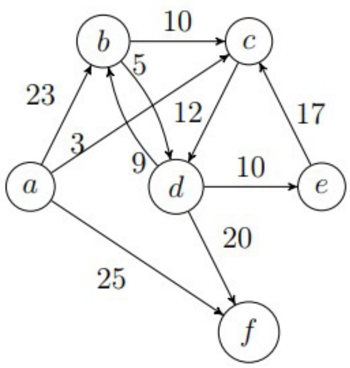
Задача 4. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа; в таблице слева содержатся сведения о протяжённости каждой из этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта Б в пункт В. В ответе запишите целое число − так, как оно указано в таблице.

	П1	**П2**	**П3**	**П4**	**П5**	**П6**
П1		10			8	5
П2	10			20	12	
П3				4		
П4		20	4		15	
П5	8	12		15		7
П6	5				7	



Ответ: 8.

Ключевая задача: между населёнными пунктами *a, b, c, d, e, f* построены односторонние дороги. Необходимо определить длину наиболее длинного пути между пунктами *a* и *f*, проходя через любой из городов не более одного раза.

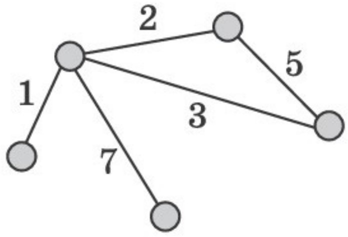


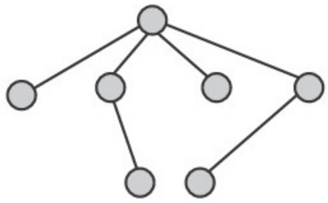
Ответ: 65.

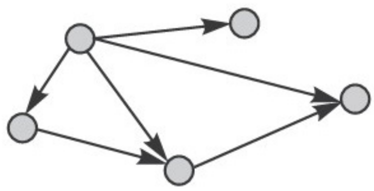
Деревья

Основные понятия: дерево, корень дерева, лист дерева, дерево вариантов/событий, дерево случайного эксперимента.

Задача 1. Установите соответствие:



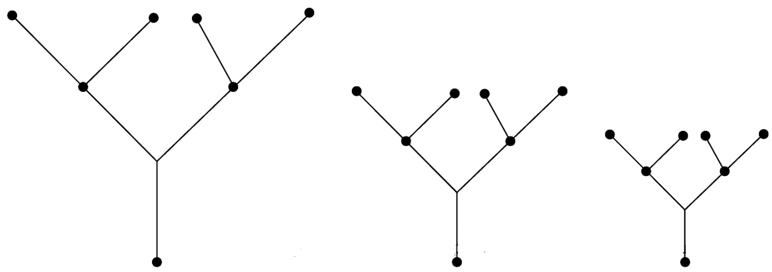




Ориентированный граф	Взвешенный граф	Дерево

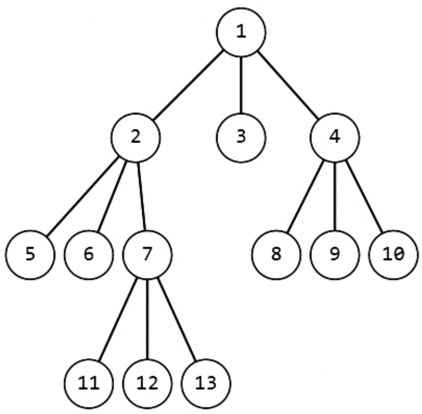
Ответ: 1 – взвешенный граф, 2 – дерево, 3 – ориентированный граф.

Задача 2. Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется лесом. Пусть лес состоит из 15 деревьев и имеет В вершин и Р рёбер. Чему равно В − Р?



Ответ: 15.

Задача 3. Изобразите какое-нибудь дерево, в котором 4 вершины степени 3, 9 листьев и наибольший путь длины 3.

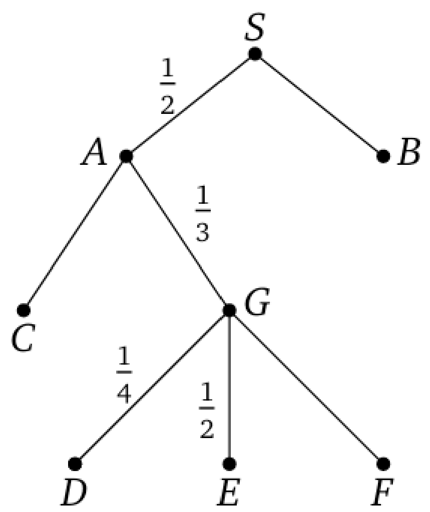


Ответ:

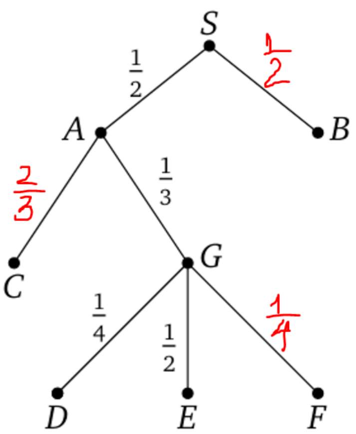
Задача 4. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента с началом в точке S.

а) Изобразите дерево в своей тетради и напишите недостающие вероятности на рёбрах.

б) Вычислите вероятность цепочек SAC и $SAGF$.



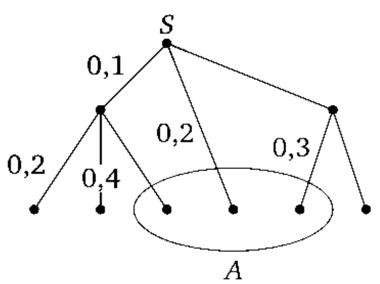
Ответ:



а)

б) $p(SAC) = 1/3$, $p(SAGF) = 1/24$.

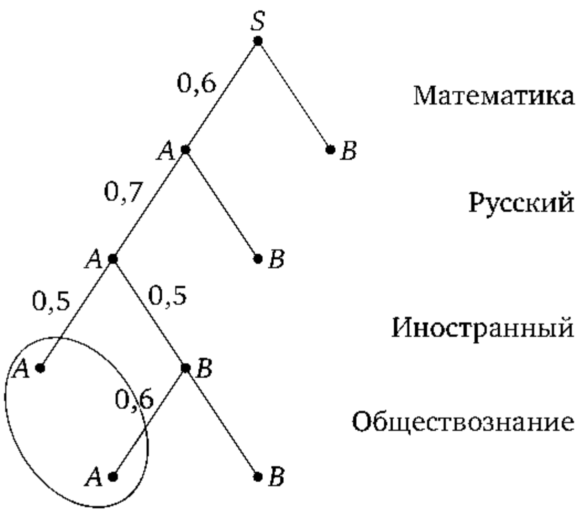
Задача 5. На рисунке изображено дерево некоторого случайного эксперимента. Найдите вероятность события A.



Ответ: 0,45.

Задача 6. Чтобы поступить на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов – математике, русскому и иностранному языкам. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов – математике, русскому языку и обществознанию. Вероятность того, что абитуриент Р. получит не менее 68 баллов по математике, равна 0,6; по русскому языку – 0,7; по иностранному языку – 0,5 и по обществознанию – 0,6. Найдите вероятность того, что Р. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Ответ:

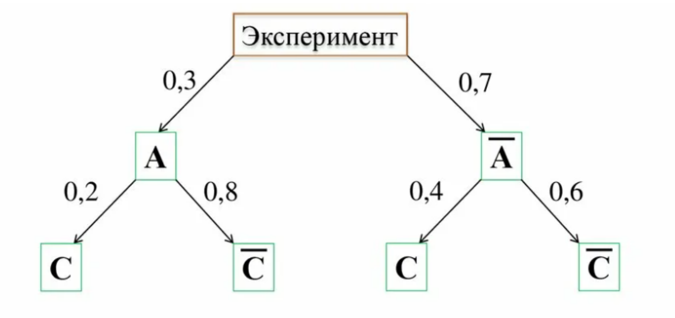


Событие $M = \{$абитуриент прошёл хотя бы на одну из специальностей$\}$ показано на рисунке закрашенной областью. Его вероятность равна

$$P(M) = P(SAAA) + P(SAABA) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}336.$$

Ключевая задача: в некотором эксперименте вероятность события А равна 0,3. Если событие А наступает, то вероятность С события равна 0,2; а в противоположном случае вероятность события С равна 0,4. Найдите вероятность события С.

Ответ:



$$P(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}34$$

Методическая подборка задач по теме «Действия над событиями»

Елена Ивановна Зубарева,
учитель математики
КОГОАУ «Кировский физико-математический лицей»

1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

2. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а в последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

3. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,85. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,94. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

4. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,4. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

5. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,6. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

6. В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

7. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов – математике, русскому и иностранному языкам. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов – математике, русскому языку и обществознанию. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 75 баллов по математике, равна 0,6; по русскому языку – 0,8; по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

8. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

9. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,7?

10. Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,95. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

11. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

12. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,3. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трёх попыток.

13. Рекламное агентство использует автоматическую телефонную станцию, которая по введённому списку телефонных номеров дозванивается до абонентов и при ответе передаёт записанное голосовое сообщение. При отсутствии ответа станция набирает номер ещё раз. Если с абонентом не удалось соединиться после пяти попыток, станция набирает номер другого абонента. Установлено, что станция может дозвониться до абонента с первого раза с вероятностью 0,2; а при каждом следующем наборе номера этого абонента вероятность увеличивается на 0,1. Найдите вероятность того, что станция сможет передать абоненту сообщение не позднее третьего набора его номера.

14. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

15. На складе допускается установка пожарных извещателей (датчиков) двух типов. Дымовой извещатель реагирует на задымление, а тепловой – на повышенную температуру. При возникновении пожара вероятность срабатывания дымового извещателя равна 0,93; а теплового – 0,97. На складе решили установить один дымовой и один тепловой извещатель, работающие независимо друг от друга. Какова вероятность срабатывания только одного из них при возникновении пожара?

16. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

17. В ящике стола лежит 50 ручек: 16 синих, 13 чёрных, 10 красных и осталь-

ные зелёные. Из ящика стола хотят достать одну ручку. Найдите вероятность того, что это будет синяя или зелёная ручка

18. На одной полке стоит 36 блюдец: 14 синих и 22 красных. На другой полке стоит 36 чашек: 27 синих и 9 красных. Наугад берут два блюдца и две чашки. Найти вероятность того, что из них можно будет составить две чайные пары (блюдце с чашкой), каждая из которых будет одного цвета.

19. Садовник принёс две корзины фруктов. В одной из них 3 яблока и 9 персиков, а в другой – 12 яблок и 18 персиков. Хозяйка, не глядя, взяла из каждой корзинки по одному фрукту. Какова вероятность того, что она достала два яблока или два персика?

20. В верхнем ящике стола лежит 10 белых и 15 чёрных одинаковых по размеру кубиков. В нижнем ящике стола лежит 15 белых и 10 чёрных таких же кубиков. Аня наугад взяла из верхнего ящика два кубика, а Оля – два кубика из нижнего ящика. После этого Аня положила свои кубики в нижний ящик, а Оля – в верхний. Найдите вероятность того, что в верхнем ящике по-прежнему будет 10 белых и 15 черных кубиков.

21. В кафе на одной полке в случайном порядке стоят 50 чайных чашек: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. На другой полке в случайном порядке стоят 50 блюдец: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. Найти вероятность того, что случайно выбранные блюдце и чашка будут: а) зелёного цвета; б) одинакового цвета.

Проверочная работа

1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

2. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а в последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

3. По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,88. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

4. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,21. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

5. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б.

с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

6. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,7?

7. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

8. Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

9. Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

10. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

11. Садовник принес две корзины фруктов. В одной из них 8 яблок и 12 персиков, а в другой – 2 яблока и 6 персиков. Хозяйка, не глядя, взяла из каждой корзинки по одному фрукту. Какова вероятность того, что она достала два яблока или два персика?

12. В коробке 5 красных и 4 синих шара. Случайным образом из коробки извлекают 4 шара. Какова вероятность того, что среди них окажется не более одного красного шара? Результат округлите до тысячных.

Практические задачи по предмету «Теория вероятностей и математическая статистика»

Татьяна Николаевна Казанцева,
учитель математики
МБОУ «СОШ с УИОП №47» г. Кирова

Данные для заданий взяты из реальной практики: ученик 9 класса работал над проектом «Маркетинговое исследование работы школьной столовой». Задания рассчитаны на учеников 7 класса, однако могут быть предложены и более старшим обучающимся основной школы.

Задание 1. В рамках исследования работы школьной столовой было проведено анкетирование учащихся школы. Респонденты выбирались случайным образом. Один из вопросов анкеты был: какой вид выпечки в школьной столовой ваш самый любимый? Варианты ответов и количество респондентов, выбравших данный вид выпечки, представлены в таблице 1. Число респондентов, ответивших «не ем выпечку», составило 11 человек.

Таблица 1 –
Предпочтения учеников школы при покупке выпечки в школьной столовой

Вид выпечки	***Число респондентов, предпочитающих данный вид выпечки***
Булочка с орехом	2
Слойка с сыром	14
Сладкая булочка	29
Ватрушка	6
Пицца	46

1. Постройте круговую диаграмму, отражающую предпочтения школьников. Не забывайте учесть и тех, кто выпечку не покупает.

2. Сделайте вывод о том, какие виды выпечки столовой следует предлагать в больших количествах.

Решение.

Для построения круговой диаграммы необходимо вычислить долю респондентов, выбравших тот или иной вариант ответа, а также градусную меру дуги, соответствующей сектору на круговой диаграмме. Составим вспомогательную таблицу 2.

Таблица 2 – Данные для построения круговой диаграммы

Вид выпечки	***Число респондентов, предпочитающих данный вид выпечки***	***Доля данных респондентов от всех опрошенных***	***Градусная мера дуги на круговой диаграмме***
Булочка с орехом	2	0,02	7
Слойка с сыром	14	0,13	47
Сладкая булочка	29	0,27	96
Ватрушка	6	0,06	20
Пицца	46	0,43	153

Вид выпечки	*Число респондентов, предпочитающих данный вид выпечки*	*Доля данных респондентов от всех опрошенных*	*Градусная мера дуги на круговой диаграмме*
Не покупают выпечку	11	0,10	37
Всего	108	1	360

Построим диаграмму *(рисунок 1)*.

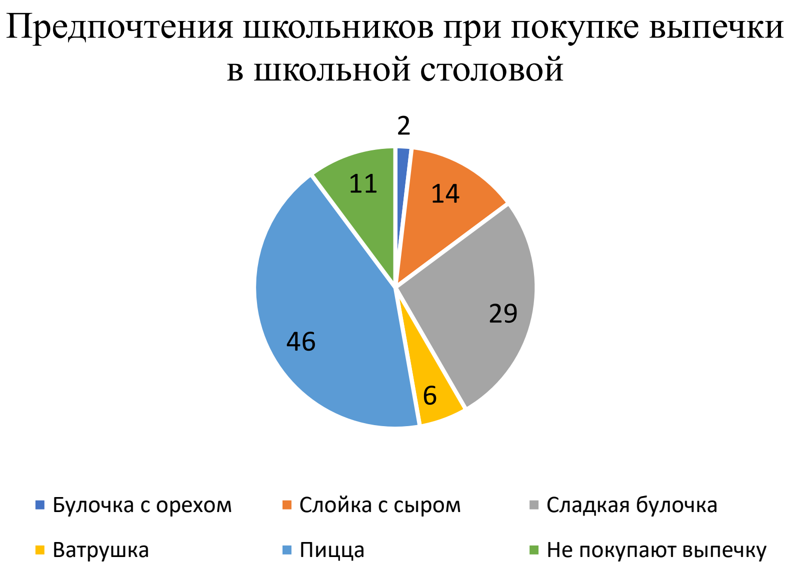


Рисунок 1 – Предпочтения школьников при покупке выпечки в школьной столовой

Задание 2. При ответе на один из вопросов анкеты респондентам необходимо было оценить некоторые параметры работы столовой по 10-балльной шкале. Чем лучше оценка показателя, тем выше балл. Количество респондентов, поставивших ту или иную оценку по каждому параметру, приведено в таблице 3.

Таблица 3 – Оценка некоторых показателей работы школьной столовой

Показатели	*Количество респондентов, поставивших оценки от 1 до 10 баллов*									
	1 балл	*2 балла*	*3 балла*	*4 балла*	*5 баллов*	*6 баллов*	*7 баллов*	*8 баллов*	*9 баллов*	*10 баллов*
Чистота обеденного зала и оборудования для раздачи пищи	3	3	5	14	21	28	14	5	11	4

Показатели	*Количество респондентов, поставивших оценки от 1 до 10 баллов*									
	1 балл	*2 балла*	*3 балла*	*4 балла*	*5 баллов*	*6 баллов*	*7 баллов*	*8 баллов*	*9 баллов*	*10 баллов*
Состояние посуды в столовой	4	4	9	13	10	18	10	17	15	8
Доброжелательность персонала столовой	5	4	4	9	4	17	14	25	12	14
Качество блюд	3	4	6	11	19	25	18	15	3	4
Отсутствие очередей на раздаче (нет очередей – 10 баллов)	44	4	13	9	21	4	3	4	3	3

1. Рассчитайте частоты оценок для каждого показателя. На основе частот сделайте вывод о том, каким характеристикам работы столовой школьники дали высокую оценку, каким нет.

2. Определите медианное значение оценок каждого показателя. Сделайте выводы.

3. Используя рассчитанные частоты, вычислите среднее арифметическое значение оценки каждого показателя. Сделайте вывод, какие характеристики работы столовой школьники оценили высоко. Совпали ли ваши выводы с выводами, сделанными на основе анализа частот и медиан?

Решение.

Если есть возможность автоматизировать вычисление частот и среднего арифметического с помощью редактора электронных таблиц, необходимо воспользоваться ей, сократив тем самым время вычислений.

Для вычисления частот составим вспомогательную таблицу 4. Число респондентов, отвечавших на данный вопрос, 108 человек.

Таблица 4 – Частоты оценок

Показатели	*Количество респондентов, поставивших оценки от 1 до 10 баллов*									
	1 балл	*2 балла*	*3 балла*	*4 балла*	*5 баллов*	*6 баллов*	*7 баллов*	*8 баллов*	*9 баллов*	*10 баллов*
Чистота обеденного зала и оборудования для раздачи пищи	0,03	0,03	0,05	0,13	0,19	0,25	0,13	0,05	0,10	0,04

Показатели	*Количество респондентов, поставивших оценки от 1 до 10 баллов*									
	1 балл	*2 балла*	*3 балла*	*4 балла*	*5 баллов*	*6 баллов*	*7 баллов*	*8 баллов*	*9 баллов*	*10 баллов*
Состояние посуды в столовой	0,04	0,04	0,08	0,12	0,09	0,17	0,09	0,16	0,14	0,07
Доброжелательность персонала столовой	0,05	0,04	0,04	0,07	0,04	0,16	0,13	0,23	0,11	0,13
Качество блюд	0,03	0,04	0,06	0,10	0,17	0,23	0,17	0,13	0,03	0,04
Отсутствие очередей на раздаче (нет очередей – 10 баллов)	0,40	0,04	0,12	0,08	0,19	0,04	0,03	0,04	0,03	0,03

1. Медианы показателей. Поскольку число оценок в ряду чётное, то медиана – это среднее арифметическое 54-го и 55-го чисел в ряду. Считая количество оценок (начиная с 1 балла) нарастающим итогом, найдём медианные значения оценок *(таблица 5)*.

2. Среднее арифметическое каждой оценки найдём как сумму произведений значений оценок и их частот. Значения среднего арифметического каждой оценки представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Медианные и средние арифметические значения оценок

Характеристики работы столовой	*Медиана*	*Среднее арифметическое*
Чистота обеденного зала и оборудования для раздачи пищи	6	5,8
Состояние посуды в столовой	6	6,2
Доброжелательность персонала столовой	7	6,7
Качество блюд	6	5,7
Отсутствие очередей на раздаче (нет очередей – 10 баллов)	3	3,4

Как значения медианных показателей, так и среднего арифметического свидетельствуют о том, что большинство показателей имеют среднюю оценку 6 баллов по 10-балльной шкале. Чуть выше (7 баллов) оценена доброжелательность персонала столовой. Самая большая проблема с точки зрения школьников – очереди в столовой: средняя оценка данного показателя только 3 балла.

Практические задачи по статистике для учащихся 7 класса

Мария Александровна Кунилова,
учитель математики
МБОУ «СОШ №45 им. А.П. Гайдара» г. Кирова

Задача по теме «Упорядочивание данных. Поиск информации»

1. В таблице представлена информация о знаменитых учёных, родившихся на Вяткой земле.

Ученый	***Годы жизни***	***Место рождения***	***Звание, награды, достижения в науке***
Бакулев Александр Николаевич	25 ноября (7 декабря) 1890 – 31 марта 1967	деревня Невинниковская близ г. Слободского Вятской губернии	Хирург, член-корреспондент АН, президент Академии медицинских наук (1954-1957), лауреат Государственных премий, Герой Социалистического Труда (1960). В 1956 г. на базе клиники Бакулева создан институт сердечно-сосудистой хирургии, научным руководителем которого он был до конца жизни
Бехтерев Владимир Михайлович	20 января (1 февраля) 1857 – 24 декабря 1927	д. Сорали Вятской губернии	Невропатолог, психиатр, психолог. С 1893 – профессор Военно-медицинской академии, с 1897 – профессор Женевского медицинского института, с 1908 – директор Психоневрологического института, с 1918 – директор Института по изучению мозга и психической деятельности
Буш Николай Адольфович	29 октября (10 ноября) 1869 – 7 августа 1941	г. Слободской Вятской губернии	Ботаник, доктор биологических наук, профессор, член-корреспондент АН СССР. Автор более 150 научных работ

Ученый	*Годы жизни*	*Место рождения*	*Звание, награды, достижения в науке*
Спицын Александр Александрович	14 (26) августа 1858– 17 сентября 1931	г. Яранск Вятской губернии	Археолог, действительный член Академии истории материальной культуры, член-корреспондент Российской АН. Автор более 300 трудов
Гусев Матвей Матвеевич	16 (28) ноября 1826 – 10 (22) апреля 1866	г. Вятка	Первый русский астрофизик. Первым в России начал фотографическое исследование солнечных пятен, начал издавать первый в стране журнал по точным наукам «Вестник математических наук»
Зеленин Дмитрий Константинович	21 октября (2 ноября) 1878 – 31 августа 1954	с. Люк Сарапульского уезда Вятской губернии	Этнограф, филолог, член-корреспондент АН. С 1904 г. – член Русского географического общества. В 1916-1925 гг. работал в Харьковском и Ленинградском университетах
Циолковский Константин Эдуардович	5 (17) сентября 1857 – 19 сентября 1935	село Ижевское (ныне Рязанская область)	Теоретик воздухоплавания, аэродинамики, основоположник космонавтики, философ. Жил в Вятке с 1868 по 1873 и с 1876 по 1878. До марта 1873 учился в Вятской гимназии

По данным таблицы ответьте на вопросы:

1) Какой учёный занимался биологией? Где он родился? Перечислите его достижения в науке;

2) Кто из перечисленных учёных является членом Русского географического общества, с какого года?

3) В какие годы проживал на Вятке К.Э. Циолковский? Какой областью науки он занимался? Знаешь ли ты ещё что-то об этом учёном, кроме данных таблицы?

Решение:

1) Буш Николай Адольфович, г. Слободской Вятской губернии, доктор биологических наук, профессор, член-корреспондент АН СССР. Автор более 150 научных работ;

2) Зеленин Дмитрий Константинович с 1904 г. − член Русского географического общества;

3) Циолковский Константин Эдуардович жил в Вятке с 1868 по 1873 и с 1876 по 1878, теоретик воздухоплавания, аэродинамики, основоположник космонавтики, философ. Константин Эдуардович Циолковский внёс значительный вклад в науку, создав: теорию реактивного движения, законы движения ракет, первые конструкции для покорения космического пространства реактивными аппаратами. Его идеи «космического поезда», теории реактивного движения и ракетодинамики, описание принципиальных конструкций ракетных двигателей, математические обоснования и расчёты легли в основу знаний и технологий, которые позволили человечеству выйти на околоземную орбиту.

Задача по теме «Среднее арифметическое, модальное, медианное значения, размах признака»

2. В таблице представлены длины рек Кировской области (в пределах области).

Река	*Длина, км*
Вятка	1250
Кама	551
Молома	419
Пижма	220
Луза	210
Кобра	205
Чепца	200

1) Упорядочена ли таблица? Если да, то по какому признаку? Упорядочьте таблицу по названию рек в алфавитном порядке.

2) Расположите реки Лузу, Пижму, Чепцу и Кобру по возрастанию их длины. Вычислите среднее арифметическое значение длины этих рек. Определите медианное значение и размах показателя «длина реки».

3) Во сколько раз длина Вятки больше длины Чепцы?

Решение:

1) да, упорядочена по длине реки.

Сортировка по признаку «название реки» в алфавитном порядке:

Река	*Длина, км*
Вятка	1250
Кама	551
Кобра	205

Река	*Длина, км*
Луза	210
Молома	419
Пижма	220
Чепца	200

2) Расположим реки по их протяжённости в пределах Кировской области:

Река	*Длина, км*
Чепца	200
Кобра	205
Луза	210
Пижма	220

Среднее арифметическое значение длины реки = (200+205+210+220):4 = 209 км.
Медианное значение = (205+210):2 = 207,5 км.
Размах признака «длина реки» = 220 – 200 = 20 км.
3) Длина Вятки больше длины Чепцы в 1250:200 = 6,25 раза.

Задача по теме «Тенденции и случайные отклонения»

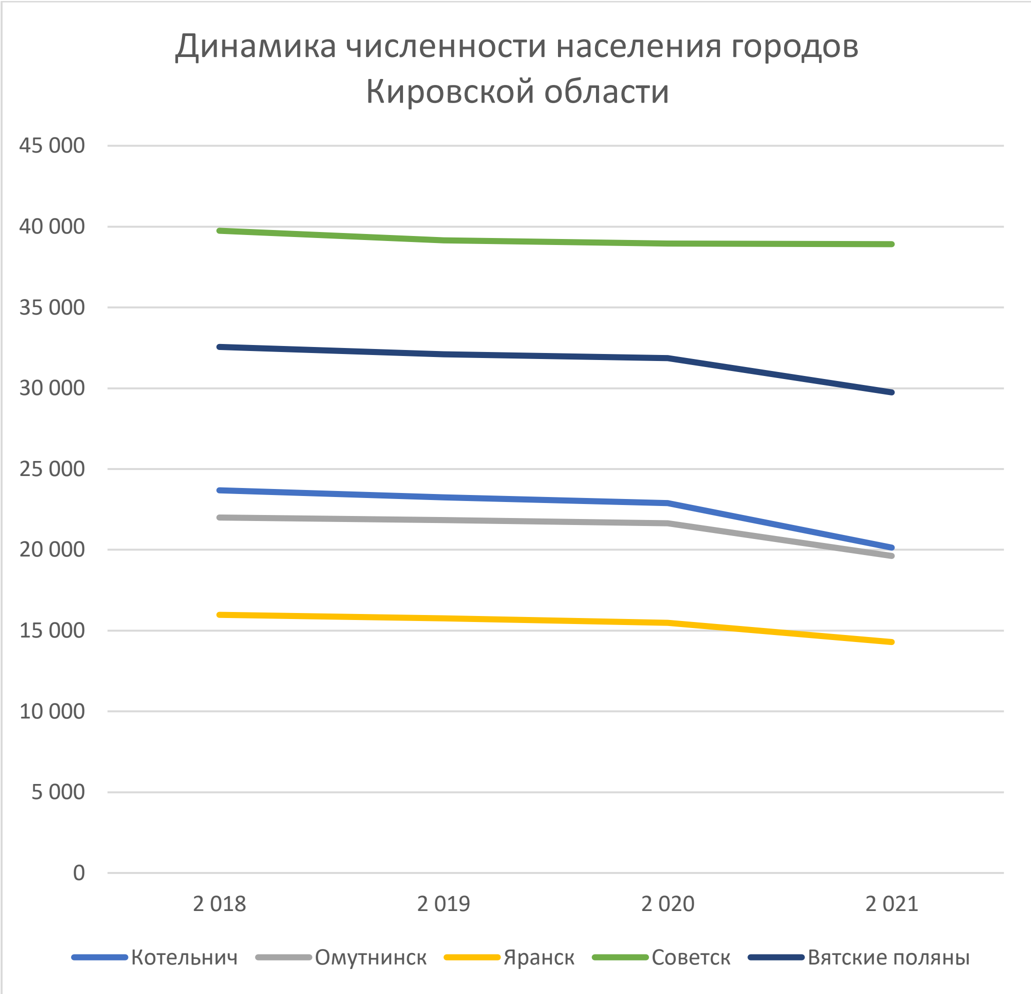
4. В таблице указаны сведения о численности населения населённых пунктов в Кировской области в 2018-2021 гг.

Населённый пункт	*2018 год*	*2019 год*	*2020 год*	*2021 год*
Котельнич	23 682	23 244	22 882	20 144
Омутнинск	22 009	21 844	21 633	19 629
Яранск	15 985	15 752	15 475	14 284
Советск	39 752	39 150	38 963	38 910
Вятские Поляны	32 562	32 108	31 873	29 742

Постройте линейную диаграмму динамики численности населения в этих городах. Сформулируйте выводы.

Определите абсолютные приросты и темпы роста численности населения в Советске и Вятских Полянах. Сравните значения показателей. Сформулируйте выводы.

Решение:



Вывод: численность населения заметно ежегодно снижается. Менее заметно снижение численности населения в Советске, более заметно в Котельниче.

год	***г. Советск***	***Абсолютный прирост, чел.***	***Темп роста, %***	***г. Вятские поляны***	***Абсолютный прирост, чел.***	***Темп роста, %***
2018	39 752	-	-	32 562	-	-
2019	39 150	-602	98,49	32 108	-454	98,61
2020	38 963	-187	99,52	31 873	-235	99,27
2021	38 910	-53	99,86	29 742	-2 131	93,31

Вывод: абсолютные приросты численности населения в обоих городах принимают отрицательные значения по сравнению с предыдущим годом, темпы роста меньше 100% – численность населения в обоих городах ежегодно снижается. Наибольшее снижение в рассматриваемый период в Вятских Полянах в 2021 г. по сравнению с 2020 г.

Задачи по теме «Частоты значений в массиве данных»

4. Частоту букв в русском языке можно приблизительно оценить с помощью художественных текстов. Прочитайте 3 интересных факта о Кировской области.

1) Дымковские игрушки лепили из местной красной глины. Её собирали по берегам реки Вятки. Чтобы фигурки были крепкими, глину мешали с речным песком, рубили массу лопатой, заливали водой. Потом материал долго-долго месили ногами.

2) На Кикиморской горе, откуда во все стороны видна Вятская земля, с незапамятных времён бок о бок с людьми жили кикиморы: Удача, Богатство, Семья, Искренность, Здоровье, Любовь, Яркость – семь милых сестёр.

3)В Кировской области, а точнее – в Котельничском районе, есть уникальное местонахождение древних парейазавров. Парейазавры – это крупные ящеры длиной около трёх метров, обитавшие в Европе, Африке и Азии около 250 миллионов лет назад.

а) посчитайте буквы «а», «о» и «и» в трёх этих отрывках и заполните таблицу:

Номер отрывка «а» «о» «и»

Номер отрывка	*«а»*	*«о»*	*«и»*
1			
2			
3			

б) определите количество букв «н» и «т» и заполните таблицу:

Номер отрывка	*«н»*	*«т»*
1		
2		
3		

Можно ли по полученным данным судить, какая из букв используется в русском языке чаще?

в) найдите частоту буквы «а» в первом тексте по отношению к остальным текстам. Найдите частоту буквы «н» в третьем тексте по отношению к остальным текстам. Ответ округлите до сотых.

Решение:

а)

Номер отрывка	*«а»*	*«о»*	*«и»*
1	11	18	26
2	9	18	10
3	16	24	15

б)

Номер отрывка	***«н»***	***«т»***
1	6	6
2	8	9
3	12	10

в) 0,31; 0,46.

5. Рассмотрим набор символов Кировской области.

1) Сколько всего в этом наборе символов? Сколько наборов различных символов?

2) Сколько раз в этом наборе встречается дымковская барыня? С какой частотой она встречается в наборе?

3) Найдите частоты остальных символов в наборе.

4) Найдите сумму всех частот символов в наборе. Обоснуйте.

Решение:

1) в наборе всего 10 символов, но различных только 4.

2) Барыня в этом наборе встречается 5 раз, поэтому её частота 0,5.

3) герб – 0,2; молоко – 0,2; петушок – 0,1.

4) сумма всех частот равна 1, т.к. сумма всех частот в любом наборе равна 1.

Задача по теме «Группировка данных и гистограммы».

По данным о численности населения посёлков городского типа Кировской области постройте группировку, выделив 6 групп с равными интервалами. Определите по исходным данным среднее значение численности населения, медианное значение. Определите среднее значение по сгруппированным данным. Сделайте выводы, постройте столбиковую диаграмму.

Название посёлка городского типа	***Численность населения, чел.***	***Название поёлка городского типа***	***Численность населения, чел.***
Арбаж	2507	Нагорск	4031
Аркуль	1324	Нема	2974
Афанасьево	3381	Нижнеивкино	1615
Богородское	2192	Опарино	3775
Вахруши	8874	Оричи	7433
Верхошижемье	3494	Первомайский	5054

Название посёлка городского типа	*Численность населения, чел.*	*Название поёлка городского типа*	*Численность населения, чел.*
Восточный	5708	Песковка	3371
Даровской	6012	Пижанка	3572
Демьяново	4298	Пинюг	1366
Кикнур	4045	Подосиновец	3274
Кильмезь	5272	Рудничный	2693
Красная Поляна	5154	Санчурск	3842
Кумёны	4245	Светлополянск	2289
Лальск	2334	Свеча	3771
Лебяжье	2721	Стрижи	3114
Левинцы	1822	Суна	1941
Ленинское	4010	Тужа	3906
Лесной	3421	Уни	3359
Мирный	3098	Фалёнки	4127
Мурыгино	6080	Юрья	4913

Решение:

Группировочный признак: численность населения. В задании сказано, что нужно сделать 6 групп с равными интервалами. Определим интервал группировки. Для этого отсортируем данные таблицы в порядке возрастания признака – численность населения.

Название поселка городского типа	*Численность населения, чел.*	*Название поселка городского типа*	*Численность населения, чел.*
Аркуль	1324	Пижанка	3572
Пинюг	1366	Свеча	3771
Нижнеивкино	1615	Опарино	3775
Левинцы	1822	Санчурск	3842
Суна	1941	Тужа	3906
Богородское	2192	Ленинское	4010
Светлополянск	2289	Нагорск	4031
Лальск	2334	Кикнур	4045
Арбаж	2507	Фалёнки	4127
Рудничный	2693	Кумёны	4245
Лебяжье	2721	Демьяново	4298

Нема	2974	Юрья	4913
Мирный	3098	Первомайский	5054
Стрижи	3114	Красная Поляна	5154
Подосиновец	3274	Кильмезь	5272
Уни	3359	Восточный	5708
Песковка	3371	Даровской	6012
Афанасьево	3381	Мурыгино	6080
Лесной	3421	Оричи	7433
Верхошижемье	3494	Вахруши	8874
Итого	52290		98122

Среднее значение признака по не сгруппированным данным:

$$\frac{52290+98122}{40} \approx 3671 \text{ чел.}$$

Медианное значение признака «численность населения» Ме = $\frac{3494+3842}{2} =$ 3668 чел.

Поскольку необходимо выделить 6 групп, наименьшее значение признака численность населения – 1324, наибольшее – 8874, то интервал группировки равен:

h = (8874 – 1324):6 = 1258.

Получили следующие 6 групп посёлков городского типа:

Группы поселков Кировской области по численности жителей, чел.	***Число поселков, ед.***	***Частота, %***	***Поселки в интервале***
1324 – 2582	9	22,5	Аркуль, Пинюг, Нижнеивкино, Левинцы, Суна, Богородское, Светлополянск, Лальск, Арбаж
2583 – 3841	14	35,0	Рудничный, Лебяжье, Нема, Мирный, Стрижи, Подосиновец, Уни, Песковка, Афанасьево, Лесной, Верхошижемье, Пижанка, Свеча, Опарино
3842 – 5100	10	25,0	Санчурск, Тужа, Ленинское, Нагорск, Кикнур, Фалёнки, Кумёны, Демьяново, Юрья, Первомайский
5100 – 6358	5	12,5	Красная Поляна, Кильмезь, Восточный, Даровской, Мурыгино

Группы поселков Кировской области по численности жителей, чел.	*Число поселков, ед.*	*Частота, %*	*Поселки в интервале*
6359 – 7617	1	2,5	Оричи
7618 – 8875	1	2,5	Вахруши
итого	40	100,0	

Среднее значение по сгруппированным данным:

$$\frac{1953\cdot 9+3212\cdot 14+4471\cdot 10+5729\cdot 5+6988\cdot 1+8246{,}5\cdot 1}{40}=3779\text{ чел.}$$

Столбиковая диаграмма:

Средние значения по несгруппированным данным и по группировке незначительно отличаются. Медианное значение признака и среднее значение признака близки и равны соответственно3668 чел и 3671 чел. Модальное значение признака по сгруппированным данным находится в интервале от 2583 до 3841 чел., т.е. большинство населённых пунктов имеют численность населения в этом диапазоне. Значит совокупность районов Кировской области характеризуется средним значением достаточно хорошо.

Неожиданное применение условной вероятности

Артём Владимирович Миклин,
учитель математики
КОГОАУ «Кировский физико-математический лицей»

Понятие условной вероятности играет важнейшую роль в современной теории вероятностей. Условная вероятность позволяет учитывать дополнительную информацию при определении вероятности события. В ряде случаев при помощи условной вероятности можно существенно упростить вычисление вероятности. На уроках от детей часто можно услышать вопрос: «А что было бы, если…?». Изменится ли от этого их жизнь? Не знаю, изменится ли она, но, как показывает условная вероятность, прежней она уже не будет.

Ежегодно в лицее наблюдается любопытное явление: учащиеся в неформальной обстановке активно играют в покер – разумеется, без денежного оборота, в рекреационных и интеллектуальных целях. Это порождает живую научную дискуссию: каков баланс между случайностью и навыком в этой игре? Является ли покер полем для приложения законов теории вероятностей и стратегического расчёта, или же доминирующим фактором остаётся неуправляемая удача?

Примечательно, что данный игровой контекст служит мощным катализатором интереса к математике. Проблемы, сформулированные в терминах карточных колод и комбинаторики, демонстрируют эффективность для вовлечения учащихся в изучение стохастических закономерностей, выступая в роли идеального практикума по теории вероятностей.

Прежде всего, немного о правилах игры. Оппонентам раздаются по 2 карты, ещё 5 карт выкладываются на стол, после чего из 7 карт каждый собирает лучшую пятикарточную комбинацию. Однако можно играть не против соперников, а одному: просто вытягивая карты и анализируя ситуацию.

Условная вероятность события A при условии (наступлении) события B вычисляется как отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. У нас на руках туз и король трефовой масти. Первые три карты на столе: дама треф, восьмёрка пик, двойка червей. Какова вероятность собрать 5 карт одной масти или, иными словами, какова вероятность того, что последние две карты были трефовыми?

Решение: мы можем выделить два независимых события: первое – «приход трефы четвёртой картой», второе – «приход трефы пятой картой, при условии, что выполнилось первое событие». Второе событие включает дополнительное условие, поэтому, введя условную вероятность, мы свели события к независимым, после чего имеем право найти вероятность каждого из них и получить ответ на поставленный в задаче вопрос простым перемножением. В этом случае формула логического умножения выглядит . В колоде 52 карты, 5 из них мы видим, значит, осталось еще 47. Нас устраивают только карты трефовой масти, а таких осталось ровно 10 (всего их 13, но 2 у нас, ещё одна на столе). Следовательно, вероятность получить трефовую карту $\frac{10}{47}$. После этого, нам ещё необходимо, чтобы и пятой картой вышла трефа. В колоде осталось 46 карт, нас устраивают 9. Вероятность этого события $\frac{9}{46}$. Поэтому общая вероятность $\frac{10}{47} \cdot \frac{9}{46} = \frac{45}{1081} \approx \frac{1}{24}$.

Другими словами, примерно один раз из 24 в этой ситуации нам удастся собрать пять карт одной масти.

Задача 2. Многих интересует, насколько часто нам будут приходить два туза.

Решение: в колоде 52 карты, из них 4 туза. После того, как вышел туз, в колоде осталось 51 карта, и из них 3 туза. Поскольку нам необходимо, чтобы случились оба эти события, то перемножаем вероятности $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$. Итак, два туза придут в среднем один раз за 221 раздачу.

Задача 3. Какова вероятность того, что нам придут туз и король?

Решение: в колоде 52 карты, в качестве первой из них нам подходят 8 (четыре туза и четыре короля). Теперь в колоде 51 карта, из них нам подходит 4 (если первой картой нам пришел туз, то теперь нам подходят 4 короля и наоборот). Общая вероятность $\frac{8}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{8}{663} \approx \frac{1}{83}$. Итак, туз с королём нам будут приходить в среднем один раз за 83 раздачи. Заметим, что туз с королём приходят чаще, чем два туза.

Задача 4. Рассмотрим задачу, когда мы знаем не только свои карты, но и карты соперника. Наши карты: четвёрка и пятёрка червовой масти, на доске первые три карты – туз и король червовой масти, а также девятка пик. У соперника туз пик и дама бубей. Какова вероятность того, что мы соберём пять червовых карт (флеш) в комбинации?

Решение: вероятность собрать флеш по выходу четвёртой карты 9/45. Вероятность собрать флеш по выходу пятой карты 9/45 (так как мы не знаем, какая карта придёт четвёртой на столе, то мы никак её не учитываем). В данном случае события зависимы. Если четвёртой картой на стол выпадет черва, то вероятность пятой карты на столе той же масти уменьшится. И наоборот, если четвёртая карта на столе нас не устроит, то вероятность успешной для нас пятой карты увеличится. Искомую вероятность мы находим по формуле $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B \backslash A)$. Здесь $P(B \backslash A)$ – это вероятность того, что черва придёт пятой картой на стол при условии, что четвёртой картой тоже пришла черва. Найдем эту вероятность: в колоде из оставшихся 44 карт нас устроят 8. Таким образом, искомая вероятность $\frac{9}{45}+\frac{9}{45}-\frac{9}{45}\cdot\frac{8}{44}=\frac{4}{11}$.

В заключение приведём «задачу-ловушку», которая относится к карточным играм и позволяет понять, насколько хорошо ученик понимает условную вероятность.

Рассмотрим ситуацию: из колоды карт берём девятку червей и девятку пик. Из этих двух карт выбираем одну. Первые три раза была вытянута девятка червей. С какой вероятностью и на четвёртый раз выпадет девятка червей? Червовая девятка четыре раза подряд выпадает достаточно редко, значит, сейчас скорее выпадет девятка пик, чем девятка червей, подсказывает нам интуиция. Но это неверно! Действительно, вероятность события «выпали четыре девятки червей подряд» составляет $\frac{1}{16}$, то есть достаточно мала. Здесь благоприятным является единственный из 16 возможных исходов: чччч, пччч, чпчч, ччпч, чччп, ппчч, пчпч, пччп, чппч, чпчп, ччпп, пппч, ппчп, пчпп, чппп, пппп. Условная же вероятность события «в четвёртый раз выпала девятка червей» составит $\frac{1}{2}$, так как есть всего два равноправных исхода, в которых первые три раза выпадала девятка червей. Здесь именно выполнение условия является редким событием, а не выпадение девятки червей при условии уже выпавших трёх.

Практические задачи во математической статистике в основной школе по теме «Среднее арифметическое» в 7 классе

Татьяна Васильевна Рыкова,
учитель математики МКОУ «ООШ деревни Ахманово Пижанского муниципального округа Кировской области»

Задача 1. Три друга Толик, Коля и Дима решили поступить в один институт на разные факультеты. Толик хочет стать строителем, Коля – электриком, а Дима программистом. Оценки аттестатов друзей представлены в таблице

Таблица 1.

Наименование предмета	***Оценки Толи***	***Оценки Коли***	***Оценки Димы***
Русский язык	4	5	4
Иностранный язык	5	5	4

Наименование предмета	*Оценки Толи*	*Оценки Коли*	*Оценки Димы*
Литература	5	4	3
Математика	4	5	5
Биология	5	4	4
География	3	5	4
Химия	4	4	3
Физика	5	4	4
Обществознание	5	5	5
История	4	3	4
Музыка	5	3	3
Физкультура	5	5	4
Информатика	5	5	5
ОБЗР	5	5	5
Труд	4	4	4

Условия поступления представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Наименование факультета	*Средний балл по всем предметам аттестата*	*Обязательные оценки по предметам*		
		математика	*физика*	*информатика*
«Промышленное и гражданское строительство»	4,5	не менее 4	5	не менее 4
«Электроэнергетика и электротехника»	4,3	не менее 4	5	не менее 4
«Программное и аппаратное обеспечение вычислительной техники»	4,5	не менее 4	5	5

Кто из друзей может подавать документы для поступления в данный институт на желаемый факультет?

Решение.

$\frac{4+5+5+4+5+3+4+5+5+4+5+5+5+5+4}{15}$ = 4,5 – средний балл всех оценок Толи;

$\frac{5+5+4+5+4+5+4+4+5+3+3+5+5+5+4}{15}$ = 4,4 – средний балл всех оценок Коли;

$\frac{4+4+3+5+4+4+3+4+5+4+3+4+5+5+4}{15}$ = 4,06 – средний балл всех оценок Димы.

По среднему баллу оценок для подачи документов не проходит Дима, Коля не проходит по обязательным оценкам по физике. Поэтому подавать документы для поступления в данный институт на желаемый факультет может только Толя.

Ответ: Из трёх друзей только Толя может подавать документы для поступления в данный институт на желаемый факультет.

Задача 2. Начинающий фермер Петров впервые начал составлять отчёт по собранному урожаю за 2024 год по основной посевной культуре «пшеница». Но по своей рассеянности не смог найти сводную таблицу по площадям своего хозяйства, поэтому ему пришлось работать с картами, вычислять площади полей. Валовой сбор зерна (вес всего собранного урожая со всей площади поля) по полям представлен в таблице 1. Весь вечер он заполнял необходимую форму отчётности в компьютере, но отправить отчёт не успел. Утром компьютер Петров не смог включить, а время сдачи отчётности заканчивается через пару часов. Помогите Петрову заполнить форму отчётности по таблице 2.

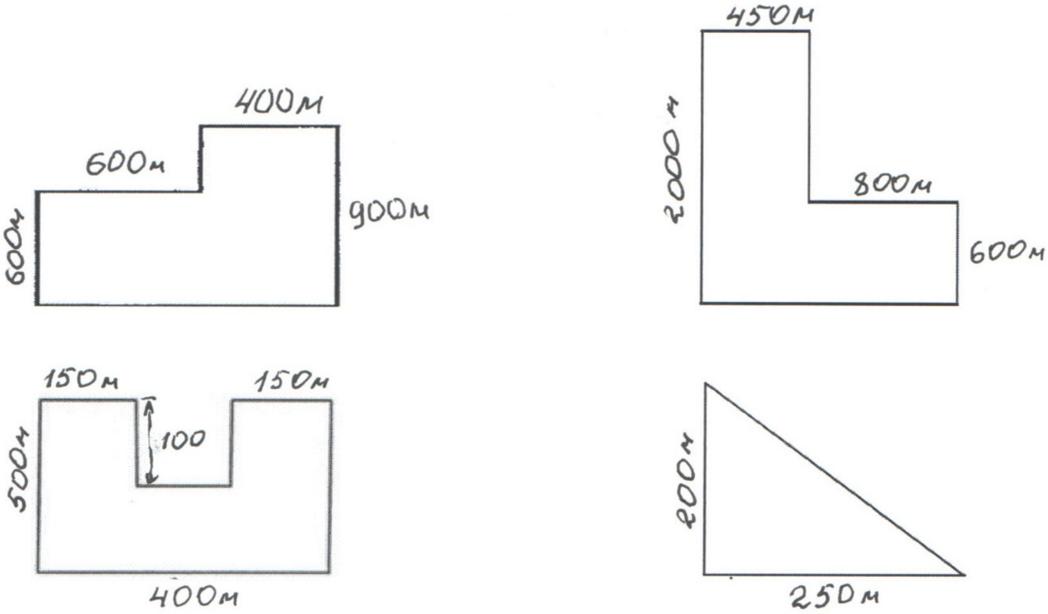


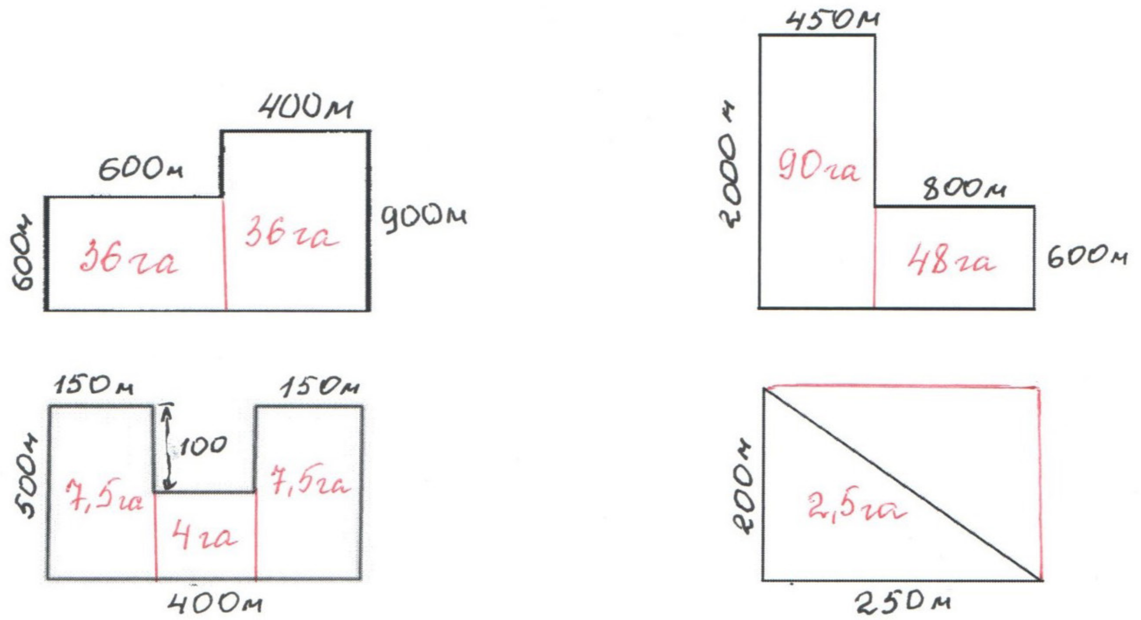
Таблица 1. Валовой сбор пшеницы на каждом из полей (ц)

Номер поля	***1***	***2***	***3***	***4***
Валовой сбор (ц)	1300	2350	400	55

Таблица 2. Отчет о сборе урожая фермерского хозяйства за 2024 год

Вид культуры	***Посевная площадь, га***	***Валовой сбор, ц***	***Урожайность, ц/га***
Пшеница			

Решение.



600 · 600 = 360000 м^2 = 36 га – площадь первой части 1 поля;
400 · 900 = 360000 м^2 = 36 га – площадь второй части 1 поля;
36 + 36 = 72 га – площадь 1 поля;
450 · 2000 = 900000 м^2 = 90 га – площадь первой части 2 поля;
800 · 600 = 480000 м^2 = 48 га – площадь второй части 2 поля;
90 + 48 = 138 га – площадь 2 поля;
150 · 500 = 75000 м^2 = 7,5 га – площадь первой части 3 поля;
150 · 500 = 75000 м^2 = 7,5 га – площадь второй части 3 поля;
400 · 100 = 4000 м^2 = 4 га – площадь третьей части 3 поля;
7,5 + 7,5 + 4 = 19 га – площадь 3 поля;
(200 · 250) : 2 = 25000 м^2 = 2,5 га – площадь 4 поля;
72 + 138 + 19 + 2,5 = 231,5 га – площадь всех полей;
1300 + 2350 + 400 + 55 = 4105 ц – валовой сбор пшеницы с 4 полей;
4105 : 231,5 = 17,7 ц/га урожайность пшеницы в хозяйстве фермера Петрова.
Ответ:

Отчет о сборе урожая фермерского хозяйства за 2024 год.

Вид культуры	***Посевная площадь, га***	***Валовой сбор, ц***	***Урожайность, ц/га***
Пшеница	231, 5	4105	17,7

Задача 3. Маша и Саша, сёстры-близнецы, решили принять участие в вокальном конкурсе. Когда группа из двадцати желающих поехать на кастинг для участия в конкурсе из родного города собралась, сопровождающий в автобусе сообщил, что средний возраст конкурсантов составляет 24 года. Но при реги-

страции на кастинг оказалось, что сёстры по возрасту не подходят для участия в конкурсе. Сколько лет девочкам, если после их ухода с кастинга средний возраст приехавших с сёстрами конкурсантов стал 25 лет?

Решение.

$24 \cdot 20 = 480$ лет – общий возраст двадцати конкурсантов, выехавших на кастинг;

$25 \cdot 18 = 450$ лет – общий возраст оставшихся на кастинге восемнадцати конкурсантов;

$480 - 450 = 30$ лет – возраст обеих девочек вместе;

$30 : 2 = 15$ лет каждой из сестёр.

Ответ: по 15 лет.

Учебно-методическое издание

Сборник лучших практик учителей математики по ведению курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

Подписано в печать 11.12.2025
Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная.Усл. печ. л. 4.19
Тираж 50 экз. Заказ 458/2025

Кировское областное государственное образовательное автономное учреждение дополнительного профессионального образования
«Институт развития образования Кировской области»
610046, Кировская обл., г. Киров, ул. Романа Ердякова, д. 23, к. 2
Тел.: 8 (8332) 25-54-42 (доб. 301) E-mail: rio@kirovipk.ru